

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の関数の $x=0$ の近傍における 4 次までのテイラー展開を求めよ.

a) $\frac{1}{1+x}$

b) $\frac{1}{x^2-3x+2}$

(2) $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする.

a) $n \geq 2$ のとき, $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ を示せ.

b) 次の積分を求めよ.

$$\iint_D y^3 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

2. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad 2x(1-y) \frac{dy}{dx} + (1+2x)y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x(e^x + 1)\sin x$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + 3\frac{y}{x} = x^3y^2 \sin x$$

3. i, j, k をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとする. 3×3 行列 A により

$$Ai = j, \quad Aj = k, \quad Ak = i$$

となるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) A および A^{-1} を求めよ.
- (2) A が直交行列であることを示せ.
- (3) A による線形変換で不変となる単位ベクトル a を求めよ.
- (4) 問(3)の a に直交し, 原点を通る平面を M とする. M の正規直交基底を b, c とするとき, Ab, Ac も M の正規直交基底であることを示せ.
- (5) 問(4)で $b \cdot k = 0, b \cdot i > 0$ となるとき, b, c を求めよ. この b, c と問(3)の a を並べてできる行列 $P = [a, b, c]$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることを示し, θ を求めよ.

4. S を 3 次元空間中のなめらかな閉曲面, n を S 上の外向き単位法線ベクトル, r を原点と点 (x, y, z) の間の距離とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $r \neq 0$ のとき, $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ を求めよ.

(2) $r \neq 0$ のとき, $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$ を求めよ.

(3) 原点が S の外部にあるとき, 次の積分

$$\int_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot n dS$$

を求めよ.

(4) 原点が S の内部にあるとき, 次の積分

$$\int_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot n dS$$

を求めよ.

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = x \sin x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

(2) 次の周期 2π の関数 $g(x)$ をフーリエ級数に展開せよ.

$$g(x) = x \cos x + x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

(3) 問 (2) の結果を用いて, 次の無限級数の値を求めよ.

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

2. 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$x_n(t) = t^n \sin t$, $y_n(t) = t^n \cos t$, $X_n(s) = \mathcal{L}[x_n(t)]$, $Y_n(s) = \mathcal{L}[y_n(t)]$ とする. ただし, n は 0 以上の整数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$ を $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $\frac{d}{dt}x_n(t)$ を $x_{n-1}(t)$ および $y_n(t)$ を用いて, $\frac{d}{dt}y_n(t)$ を $y_{n-1}(t)$ および $x_n(t)$ を用いてそれぞれ表せ.

(3) $\mathbf{u}_n = {}^t(X_n(s), Y_n(s))$ とするとき, 問 (2) の結果を用いて $\mathbf{u}_n = A_n \mathbf{u}_{n-1}$ ($n \geq 1$) を満たす行列 A_n を求めよ.

(4) $X_3(s)$ および $Y_3(s)$ を求めよ.

3. 関数 $u(r, \theta)$ は極座標 (r, θ) における偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0 \leq r < 1)$$

および条件

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$$

を満足するものとする。ただし、 $r = 0$ で u は有限とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ とするとき、 $R(r)$ および $T(\theta)$ が満たす常微分方程式を求めよ。
- (2) $r = e^z$ とするとき、 z に関する R の常微分方程式を求めよ。
- (3) $u(r, \theta)$ が次式で与えられることを示せ。

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

ただし、 a_n および b_n は定数とする。

- (4) 問 (3) の解のうち、境界条件

$$u(1, \theta) = 1 - \left| \frac{\theta}{\pi} - 1 \right| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を満足する $u(r, \theta)$ を求めよ。

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の用語を簡潔に説明せよ.

- a) 三重点
- b) ドルトンの法則
- c) 蒸発潜熱
- d) クラペイロン-クラウジウスの式

(2) ある閉じた系における温度 T で等温かつ不可逆な状態変化について考える. 以下の問いに答えよ. ただし, エンタルピーを H , エントロピーを S , 熱量を Q とする.

- a) 系のエントロピー変化 dS , 系の外部から系に流入する熱量 δQ , 温度 T の間に成り立つ関係を示せ.
- b) ギブスの自由エネルギー G の定義を述べよ.
- c) この変化が等温かつ等圧下で生じるとき, G は増加・減少いずれの方向に変化するか. 理由と共に述べよ.

熱力学 THERMODYNAMICS

2. 1 kg の単原子理想気体を作動流体とする、圧縮比 8 のオットーサイクルを考える。その圧力-比体積(p - v)線図を図 1 の $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ に示す。また、状態 1 の圧力は $p_1 = 0.12 \text{ MPa}$ 、比体積は $v_1 = 0.8 \text{ m}^3/\text{kg}$ とし、状態 3 の圧力は $p_3 = 6.4 \text{ MPa}$ とする。以下の問いに答えよ。ただし、作動流体の気体定数は $R = 0.32 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ とする。

- (1) 各過程 $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$ の名称を答えよ。
- (2) 作動流体の定積比熱 c_v および定圧比熱 c_p を求めよ。
- (3) 状態 1, 2, 3, 4 の温度をそれぞれ求めよ。
- (4) このサイクルが 1 サイクル作動する間に、外部から受け取る熱量 q_H と外部へ放出する熱量 q_L を求めよ。また、この結果を用いて、このサイクルの理論熱効率を求めよ。
- (5) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ のサイクルの一部を等圧的に変化させるサイクル $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2' \rightarrow 3' \rightarrow 4 \rightarrow 1$ を考える。状態 $2'$ および状態 $3'$ の圧力は、 4.8 MPa である。このサイクルの理論熱効率を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、 $0.751^{2/5} = 0.891$ とする。

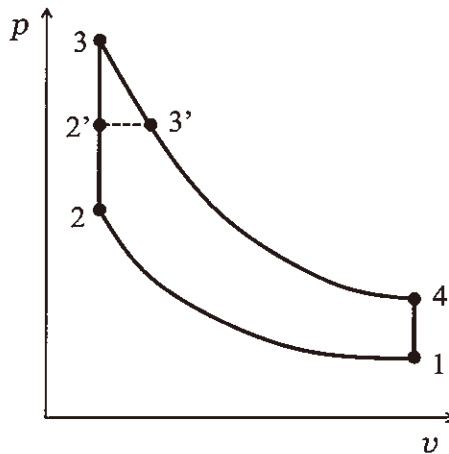


図 1

1. 図1に示すように、水平な xy 平面に置かれたY字管内を密度 ρ の非圧縮性流体が流れている。流体は断面積 A_1 および A_2 の管から流入し、断面積 A_3 の管から流出していて、流れは定常であり断面内の速度分布は一様であるものとする。管路入口からの体積流量を Q_1, Q_2 、管路入口および出口における圧力を p_1, p_2, p_3 とし、流出方向を x 軸とする。また、Y字管の曲げ角度は、 x 軸に対してそれぞれ α および β とする。流体の粘性は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 管路入口における流速をそれぞれ求めよ。
- (2) 管路出口における体積流量 Q_3 を求めよ。
- (3) Y字管へ流入する流体が持ち込む単位時間あたりの運動量を求めよ。
- (4) Y字管から流出する流体が持ち出す単位時間あたりの運動量を求めよ。
- (5) Y字管に加わる x 方向および y 方向の力を求めよ。

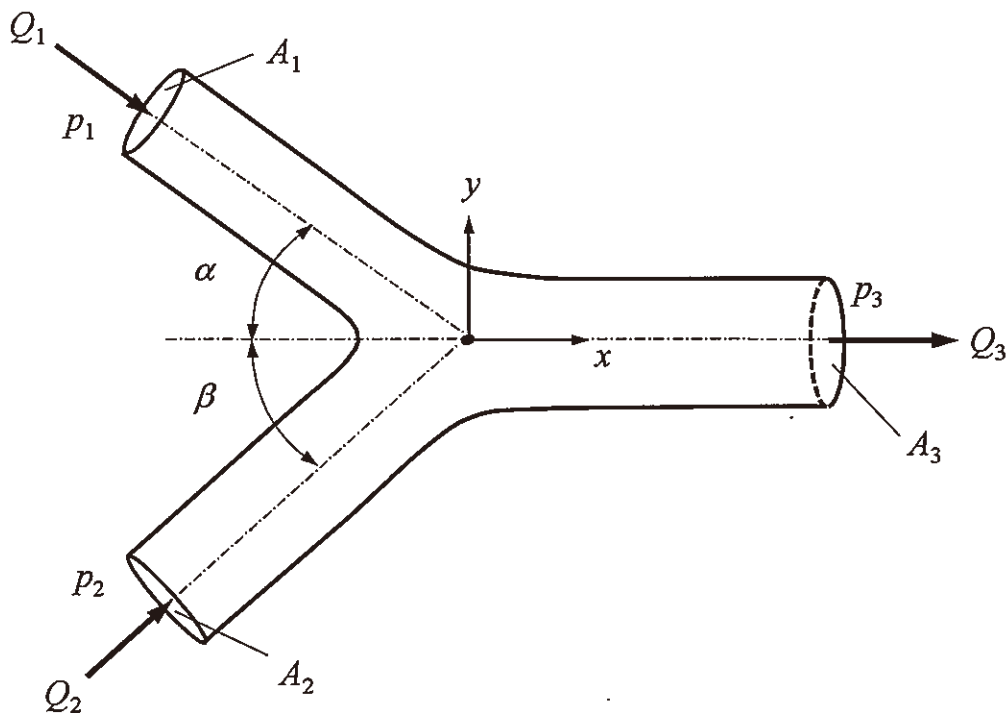


図1

2. 図 2(a)のように、平板上に置かれた半径 a の半円筒形のシェルターまわりの 2 次元非圧縮非粘性定常流れを考える。上流無限遠方での速度と圧力をそれぞれ U_∞ と p_∞ 、流体の密度を ρ とし、シェルター内部の圧力は一様で p_i とする。このとき、シェルター外部の流れは図 2(b) に示される円柱まわりのポテンシャル流とみなすことができ、外表面に沿う周方向速度 u_θ は $2U_\infty \sin \theta$ で与えられる。ただし、 θ は前方よどみ点からの角度であり、重力は無視するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) ベルヌーイの定理の物理的な意味を述べよ。
- (2) 図 2(b)において、無限遠方の点 A と円柱上の点 B の間にベルヌーイの定理を適用し、B 点における外部圧力 $p(\theta)$ を求めよ。
- (3) シェルター内部と外部の圧力差によってシェルター壁面に加わる単位長さあたりの鉛直上向きの力を求めよ。ただし、シェルター内部の圧力 p_i は p_∞ に等しいものとし、 $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ とする。
- (4) 粘性のある流れでは、シェルター表面ではく離が生じる。この理由を説明せよ。
- (5) 問 (2) と問 (4) の場合について、シェルター外表面の圧力分布を θ の関数として図示せよ。

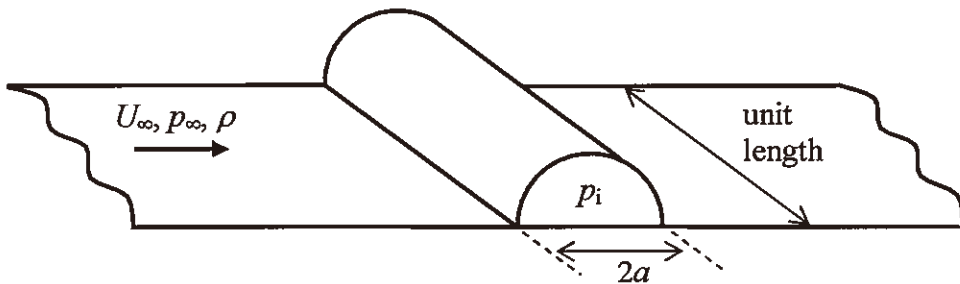


図 2(a)

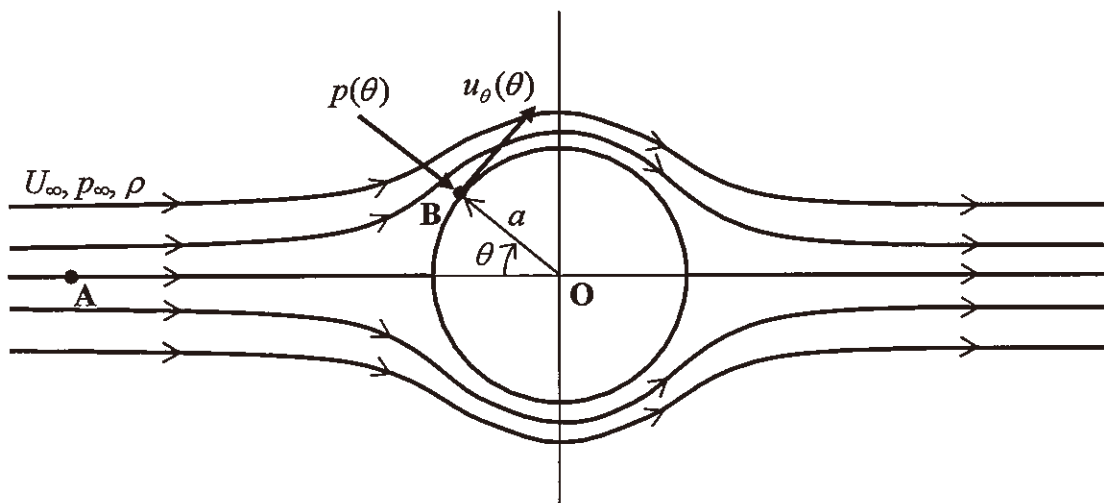


図 2(b)

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

1. 図1に示すように、全長 $2L$ なる中実丸軸 ACB が両端 A, B で剛体壁に固定され、位置 C で M_t なるねじりモーメントの作用を受けている。軸は一様な太さの AC 部分とテーパを持った CB 部分からなる。AC, CB 部分の長さはそれぞれ L である。CB 部分の直径は位置 C と右端 B の間で直線的に変化する。左端 A における軸の直径は d であり、右端 B における直径は $2d$ である。軸のせん断弾性係数を G とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 右端 B における反ねじりモーメント M_B を求めよ。
- (2) 位置 C におけるねじれ角 ϕ を求めよ。
- (3) AC 部分における最大せん断応力 τ_{\max} を求めよ。

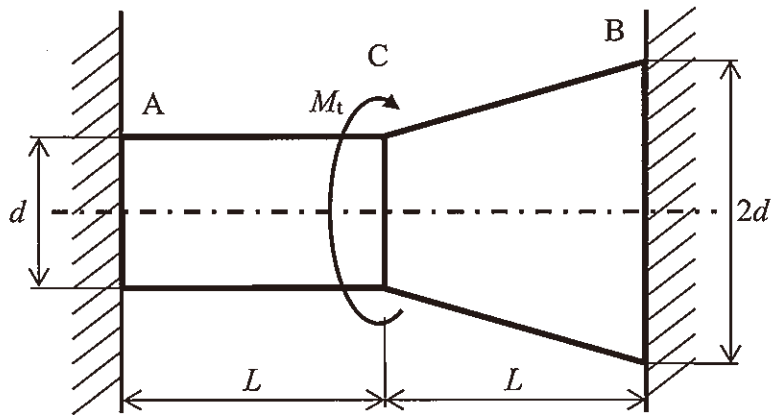


図 1

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

2. 長さ $3L$ のはり AB が左端 A で剛体壁に固定されている。はりの縦弾性係数 E_1 、断面 2 次モーメント I は一定とし、はりの自重は無視するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 図 2(a) に示すように、はり AB が右端 B で集中荷重 W を、全長にわたり等分布荷重 w_0 を受けている。はり AB のせん断力線図(SFD)および曲げモーメント線図(BMD)を描け。また右端 B におけるたわみを求めよ。

(2) 図 2(b) に示すように、はり AB が右端 B で、天井に部材 BC ならびに BD からなるトラス構造により支持されている。天井とはり AB の距離は L である。部材 BC, BD および区間 CD の長さは同じとする。部材 BC と BD の断面積は S 、縦弾性係数は E_2 とする。はり AB が全長にわたり等分布荷重 w_0 を受けたとき、右端 B におけるたわみを求めよ。ただし、部材の自重は無視するものとする。

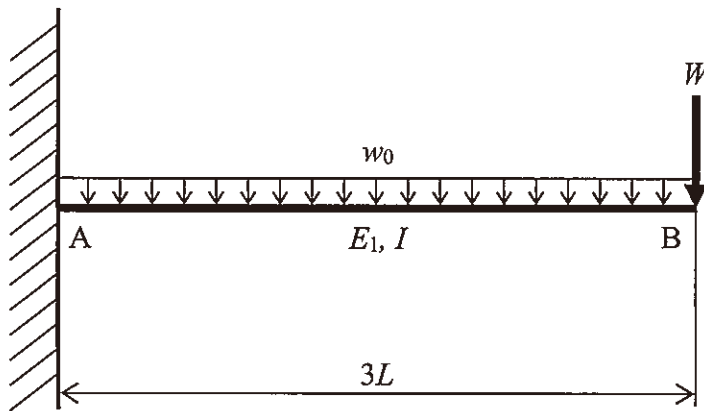


図 2(a)

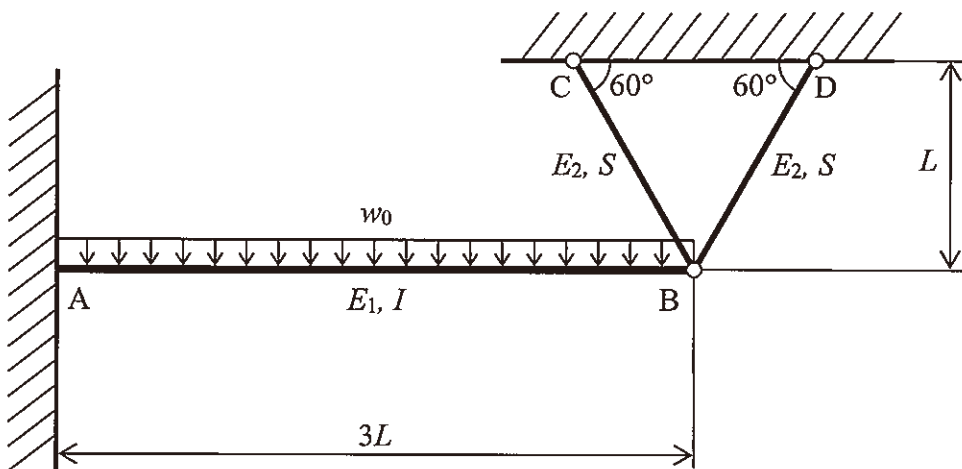


図 2(b)

1. 図1に示すような、慣性モーメント J の2つの剛体円板、ねじりこわさ k_1, k_2 の2つの軸、粘性減衰係数 c の2つの回転ダッシュポットからなるねじり振動系を考える。軸は摩擦のない軸受けで支持されており、両円板は軸心まわりに微小振動するものとする。回転ダッシュポットおよび軸の質量と慣性モーメントは無視できるものとする。釣り合いの位置からの円板の回転角をそれぞれ $\theta_1(t), \theta_2(t)$ とし、 t は時間である。回転ダッシュポットによる粘性抵抗モーメントは円板の回転角速度と粘性減衰係数 c の積である。以下の問いに答えよ。

- (1) 系の等価ねじりこわさ k を求めよ。
- (2) 等価ねじりこわさ k を用いて、両円板に成立する運動方程式をそれぞれ求めよ。
- (3) 軸のねじり角を $\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ とし、軸のねじり振動に関する運動方程式を求めよ。
- (4) 系が減衰振動するときの c の範囲を求めよ。
- (5) 問(4)の条件で、軸のねじり振動の角振動数を求めよ。

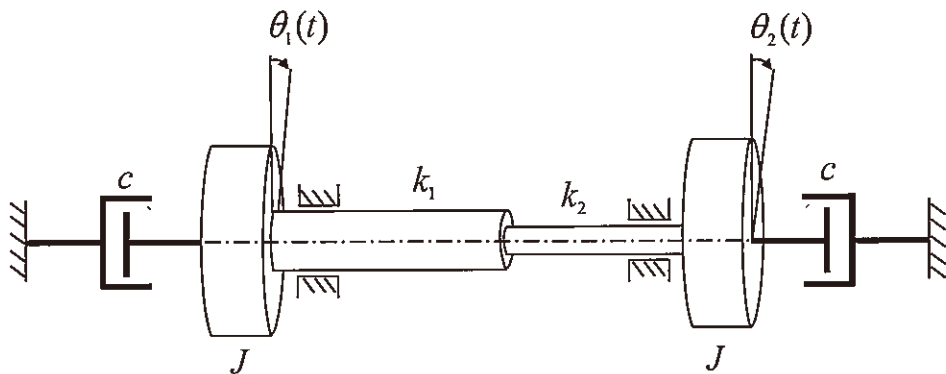


図 1

2. 図 2 に示すような、質量 M の直円錐状の剛体、ばね定数 k の 4 つのばね、粘性減衰係数 c のダッシュポットからなる振動系を考える。剛体は点 A および B でばねにより支持されるとともに、上面の中心点 C でダッシュポットにつながれている。剛体は上面が水平となる位置で静的に釣り合い、図の面内で重心 G を中心に微小回転振動するとともに、水平方向および垂直方向にも微小振動するものとする。剛体の重心 G まわりの慣性モーメントは J であり、点 G から点 C までの距離は h である。また、点 A および B から点 C までの距離は w である。剛体の重心 G まわりの回転角を θ とし、重心 G の釣り合い位置からの水平方向、垂直方向への変位をそれぞれ x および y とする。ばねとダッシュポットの質量は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) ばね 1, 4 の水平方向の伸び δ_1, δ_4 と、ばね 2, 3 の垂直方向の伸び δ_2, δ_3 を求めよ。
- (2) 系の運動エネルギー T 、およびポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- (3) 系の運動方程式を導け。
- (4) 系が垂直方向に臨界減衰振動するときの c を求めよ。

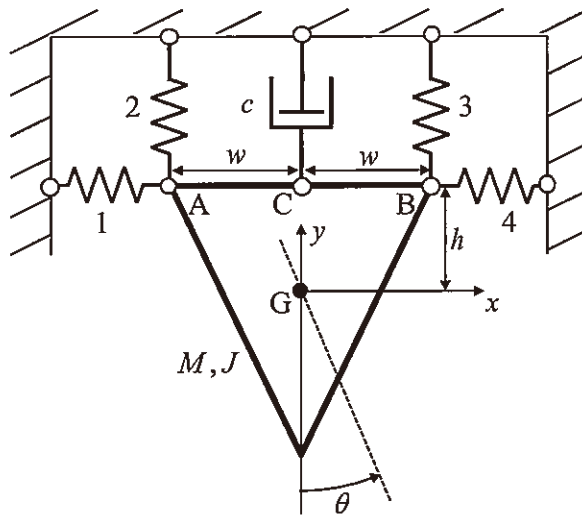


図 2

1. 以下の問いに答えよ。ただし、 s はラプラス演算子、 t は時間を表す。

(1) 図1に示すフィードバックシステムを考える。この閉ループ系の単位ステップ応答 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$y(t) = 1 - 3e^{-3t} + 2e^{-4t}$$

- a) このシステムの閉ループ伝達関数 $G(s)$ を求めよ。
- b) このシステムの開ループ伝達関数 $L(s)$ を求めよ。

(2) 図1に示す別のフィードバックシステムを考える。このシステムの開ループ伝達関数 $L(s)$ は次式で与えられる。

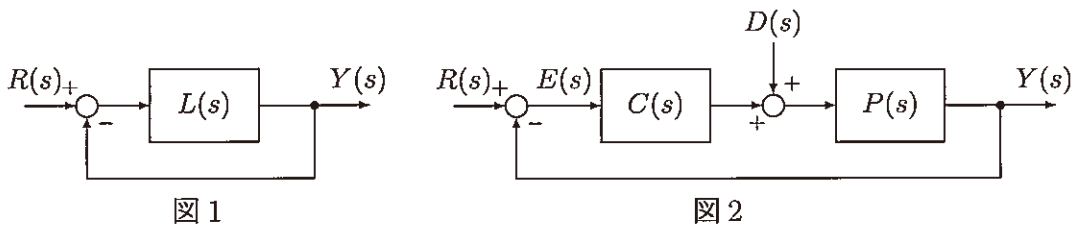
$$L(s) = \frac{K}{(1+s)(1+2s)(1+3s)} \quad (K > 0)$$

- a) この閉ループ系の伝達関数 $G(s)$ を求めよ。
- b) この閉ループ系が安定となる K の条件を求めよ。
- c) このシステムのゲイン余裕が 10 dB となる K の値を求めよ。

(3) 図2に示す制御システムを考える。ただし、 $R(s)$, $D(s)$, $Y(s)$, $E(s)$ はそれぞれ目標入力、外乱、制御出力、目標入力と制御出力の偏差のラプラス変換である。 $P(s)$ および $C(s)$ は次式で与えられる。

$$P(s) = \frac{5}{s(1+s)}, \quad C(s) = \frac{K(1+3s)}{(1+2s)} \quad (K > 0)$$

- a) 外乱 $D(s)$ から偏差 $E(s)$ までの伝達関数 $W(s)$ を求めよ。
- b) 単位ステップ関数の外乱に対する定常位置偏差が 1% 以下になるための K の条件を求めよ。



2. 次式で表されるシステムを考える.

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 2x(t) = u(t)$$

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

ただし, $u(t)$ は入力, $y(t)$ は出力, t は時間である. 状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T$ とすると, このシステムは定数行列 A , 定数ベクトル b , c を用いて

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + b u(t)$$

$$y(t) = c^T \mathbf{x}(t)$$

と表すことができる. 以下の問いに答えよ.

- (1) A , b , c を定めよ.
- (2) このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ.
- (3) 状態フィードバック $u(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$ をこのシステムに適用するとき, 閉ループ系が安定となるための k_1 , k_2 の条件を求めよ.
- (4) 出力フィードバック $u(t) = -k_3 y(t)$ ではこのシステムを安定化できないことを説明せよ.
- (5) 状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の推定値 $z(t)$ を求める同次元オブザーバを, A , b , c , $u(t)$, $y(t)$, g を用いて表せ. ただし g はオブザーバゲインである.
- (6) 問(5)のオブザーバを用いた状態フィードバック $u(t) = -k^T z(t)$ をこのシステムに適用するとき, $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^T & e(t)^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^T & (\mathbf{x}(t) - z(t))^T \end{bmatrix}^T$ を状態ベクトルとする拡大系の状態方程式を求めよ. 求めた状態方程式に基づき, 適切な g , k を選ぶことでこの拡大系を安定化できることを説明せよ.

1. 固体内の拡散について以下の問いに答えよ。

- (1) 拡散係数を D として一次元のフィックの第1法則の式を示し、式中で用いた変数の意味と単位を説明せよ。
- (2) 均質媒質中での拡散において、定常状態では拡散する溶質原子の濃度分布が直線になる理由を説明せよ。
- (3) 拡散係数 D と拡散の活性化エネルギーとの関係を説明せよ。
- (4) 系の温度を 300 K から 305 K に上げたところ、 D の値が 2.7 倍になった。 D の値が 300 K のときの 20 倍になる温度を求めよ。ただし、 $\ln 2.7 = 1$ 、および $\ln 20 = 3$ とする。
- (5) 単結晶と多結晶における拡散メカニズムについてそれぞれ説明せよ。

2. 鉄および鋼の結晶について、次の問いに答えよ。原子は剛体球と考えよ。鉄と炭素の原子半径はそれぞれ 0.124 nm と 0.070 nm, 鉄と炭素の原子量はそれぞれ 55.8 と 12.0 とする。必要に応じて、 $2^{1/2} = 1.41$, $3^{1/2} = 1.73$ を用いよ。
- (1) 鉄が面心立方構造 (fcc) および体心立方構造 (bcc) をとったときの格子定数をそれぞれ求めよ。
 - (2) 体心立方構造をとった鉄の八面体位置に、残留ひずみをもたらさずに導入できる格子間原子の半径の最大値を求めよ。その位置に炭素原子が入った場合、格子に起こる変化について説明せよ。
 - (3) 炭素を 0.60 重量%含んだ鋼を急冷した際に起こるマルテンサイト変態について、次の問いに答えよ。マルテンサイト変態は Bain の関係に従うものとする。
 - a) 炭素の含有量を原子%で求めよ。
 - b) この変態の前後に現れる相について、その名称と結晶構造をそれぞれ答えよ。
 - c) この変態の前後の格子の関係を図 1 のように隣接した 2 つの単位胞を用いて説明せよ。図には変態前後の単位胞と鉄原子位置を示すとともに、変態後の炭素原子の位置をひとつ示すこと。
 - d) 問題 c) の図を用いて、この変態は無拡散変態であることを説明せよ。

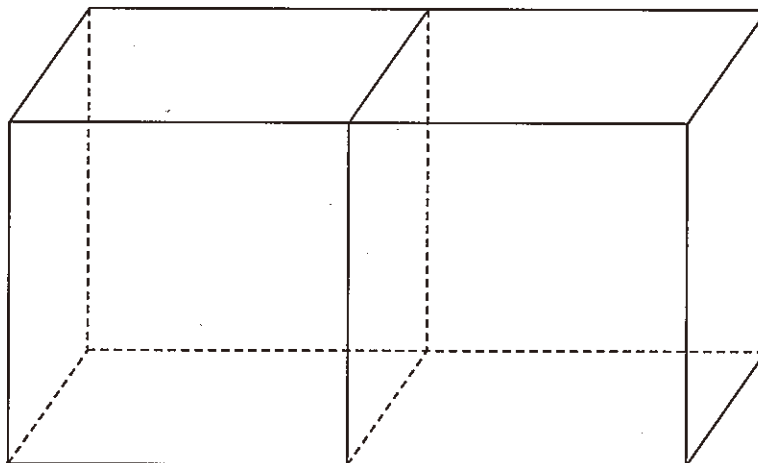


図 1

電磁気学 ELECTROMAGNETICS

1. 図1に示すように、半径 a の導体球殻が接地されており、その中心 O から距離 b の点 P ($0 < b < a$) に点電荷 q があり、その延長上に点 P' がある。ただし、線分 OP' の長さは a^2/b である。また、線分 OP' と球殻が交わる点を点 A とし、その位置の球殻内外での電場を、それぞれ $E_{in}(A)$ 、 $E_{out}(A)$ とする。次の問いに答えよ。ただし、球殻の厚さは無視できるものとし、誘電率は ϵ_0 とする。

- (1) 球殻の電位と、 $E_{out}(A)$ を求めよ。
- (2) 球殻のみを取り除き、点 P' に点電荷 $-aq/b$ を置く。このとき、球殻のあった位置での電位は、問(1)の結果と等しくなることを示せ。
- (3) 問(2)の考え方を利用して、 $E_{in}(A)$ を求めよ。
- (4) 点 A において球殻の表面に現れる電荷の面密度を $\sigma_s(A)$ とする。 $\sigma_s(A)$ 、 $E_{out}(A)$ および $E_{in}(A)$ との関係を示し、積分形のガウスの法則を用いて求めよ。
- (5) 問(4)で得られた関係を利用して、 $\sigma_s(A)$ を求めよ。

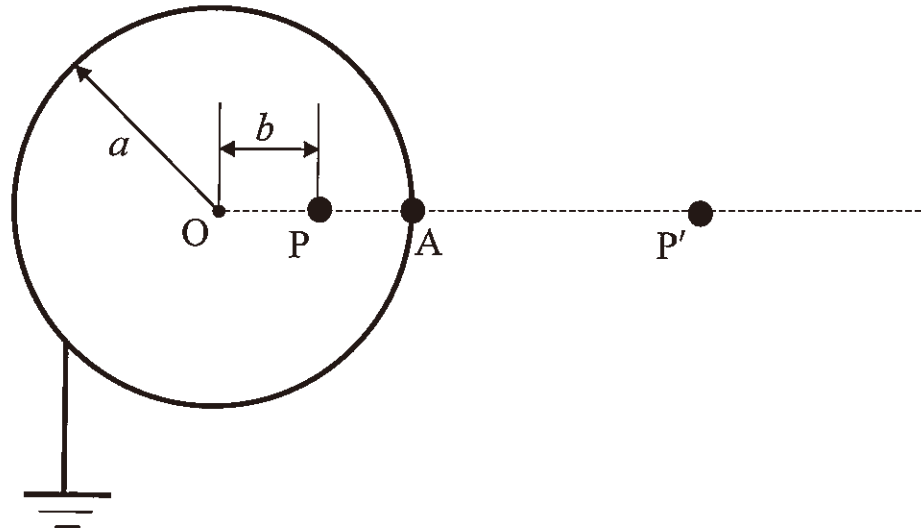


図1

電磁気学 ELECTROMAGNETICS

2. 図2に示すように、間隔 d の無限に長い2本の平行導線 A, B が xy 平面上に x 軸に平行に固定され、定常電流 I が反対向きに流れている。この導線間に、一辺の長さが a で導線の抵抗が R の正方形コイルを、一辺が x 軸に平行となるように設置する。図中で、 r は導線 B から正方形コイルまでの距離である。この正方形コイルは xy 平面を $0 < r < (d-a)$ の範囲で動くことができる。正方形コイルの初期位置は $0 < r < (d-a)/2$ の範囲内にある。次の問いに答えよ。ただし、透磁率を μ_0 とし、誘導電流がつくる磁場は無視できるものとする。

- (1) xy 平面内の磁束密度の大きさ B を r の関数として求めよ。
- (2) 正方形コイルを貫く磁束 Φ を r の関数として求めよ。
- (3) 正方形コイルが y 軸方向に速度 V で並進運動をしているとき、正方形コイルに生じる誘導起電力 \mathcal{E}^m を r の関数として求めよ。また、正方形コイルに生じる誘導電流の向きを示せ。
- (4) 問(3)の条件において、正方形コイルの位置が $r = (d-a)/2$ のときの誘導起電力 \mathcal{E}^m を求めよ。
- (5) 正方形コイルが静止しているとき、2本の平行導線 A, B を流れる電流 I が減り始めゼロになった。 I がゼロになるまでの間、正方形コイルの任意の断面を通過する総電荷量を Q とし、 Q を r の関数として求めよ。

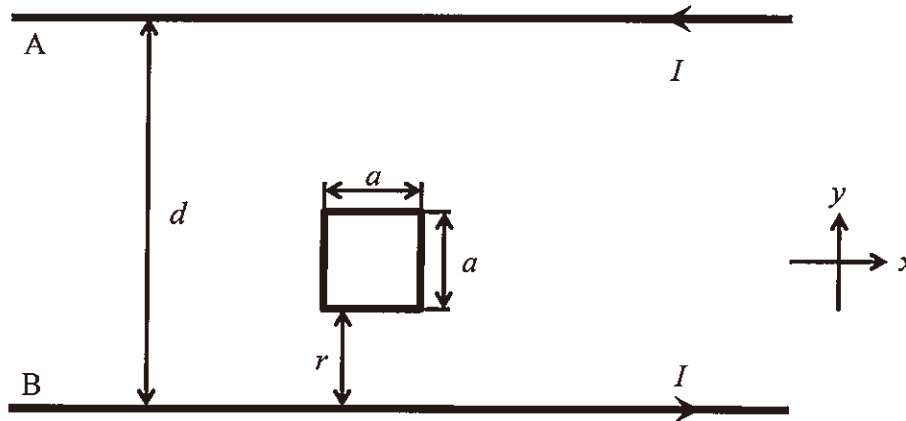


図2

量子力学 QUANTUM MECHANICS

1. 運動学における相対論的効果は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。ただし、 $\hbar = h/(2\pi)$ で、 h はプランク定数である。

(1) 半径 r の円軌道を運動する質量 M の粒子について考える。

- a) 位置の不確定さ Δx と運動量の不確定さ Δp に対する不確定性関係 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ に基づいて、円運動の回転角の不確定さ $\Delta \theta$ と角運動量の不確定さ $\Delta \ell$ に対する不確定性関係 $\Delta \theta \Delta \ell \geq \hbar/2$ を示せ。
- b) 粒子のド・ブローイ波長 λ が $n\lambda = 2\pi r$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、粒子のエネルギーを求めよ。

(2) 1次元空間においてポテンシャル $V(x)$ に束縛されている質量 m の粒子について考える。 $u_1(x)$ と $u_2(x)$ が同じエネルギー E の束縛状態の波動関数であると仮定し、以下の問いに答えよ。

- a) $u_1(x)$ と $u_2(x)$ に関する時間に依存しない1次元シュレーディンガー方程式をそれぞれ示せ。
- b) $x = \pm\infty$ における $u_1(x)$ と $u_2(x)$ の境界条件を示せ。
- c) 問 a) の式を用い以下の式が成立することを示せ。

$$\frac{d}{dx} \left(u_1(x) \frac{du_2(x)}{dx} - u_2(x) \frac{du_1(x)}{dx} \right) = 0$$

- d) 問 b), c) の結果に基づいて $u_1(x)$ と $u_2(x)$ は独立の関係ではないことを示せ。

2. $x = -\infty$ から以下の1次元ポテンシャル $V(x)$ に入射する質量 m , エネルギー E の粒子について考える.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -V_0 (< 0) & (0 \leq x) \end{cases}$$

この系における時間に依存しないシュレーディンガー方程式の一般解を $u(x)$ とする. 運動学における相対論的効果は無視できるものとして, 以下の問いに答えよ.

- (1) $x < 0$ および $0 \leq x$ の領域における $u(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) $x < 0$ および $0 \leq x$ の領域における粒子の位相速度と群速度をそれぞれ求めよ.
- (3) $x = 0$ における $u(x)$ の境界条件を示せ.
- (4) 入射波の振幅に対する反射波の振幅の比, および入射波に対する反射波の位相のずれを求めよ.
- (5) 入射波の振幅に対する透過波の振幅の比を求め, 透過波の振幅が入射波の振幅よりも小さいことを示せ.