

平成 29 年度 秋季募集
(平成 29 年 10 月・平成 30 年 4 月入学)
東北大学大学院機械・知能系入学試験

試験問題冊子

数学 A MATHEMATICS A

平成 29 年 8 月 29 日(火) 9:30 - 11:00

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票が配布されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 4 題から 3 題を選び解答すること。選択した問題を選択票に記入すること。問題ごとに 2 枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の関数の $x=0$ の近傍における 3 次までのテイラー展開を求めよ.

a) $e^x \cos x$

b) $\log_e(1 + \sin x)$

(2) C_1 を点 $(0,0)$ と点 $(1,2)$ を結ぶ線分とすると、次の C_1 に沿った線積分を求めよ. ただし, s は C_1 の弧長変数である.

$$\int_{C_1} (x^2 - y) ds$$

(3) C_2 を次の放物線の一部

$$C_2: y = \frac{1}{2}x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とすると、次の C_2 に沿った線積分を求めよ. ただし, s は C_2 の弧長変数である.

$$\int_{C_2} (x+1) ds$$

2. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

a) $(x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \cos 2x + 2x$

(2) 次の y および z に関する連立常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - 2\frac{dz}{dx} + 3z = 0 \\ \frac{dy}{dx} - 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

3. $n \times n$ 行列 A および J が

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n)$ のように与えられる. I を n 次の単位行列とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $n = 4$ のとき, J^2 および J^3 を求めよ.
- (2) $a_1 I + a_2 J + a_3 J^2 + \cdots + a_n J^{n-1}$ を A を用いて表せ.
- (3) 行列式 $|J - \omega I|$ を求めよ.
- (4) J の固有値を ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) とするとき, A の固有値 λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$\lambda_k = a_1 + a_2 \omega_k + a_3 \omega_k^2 + \cdots + a_n \omega_k^{n-1}$$

となることを示せ.

4. 図1に示すように、デカルト座標系 (x, y, z) の基本ベクトルを i, j, k , 円筒座標系 (r, θ, z) の基本ベクトルを e_r, e_θ, e_z とする. ただし, 基本ベクトルの大きさは1である. 曲面 S がデカルト座標系で

$$S: r = xi + yj + \sqrt{x^2 + y^2}k \quad (x^2 + y^2 \leq R^2)$$

により与えられる. n を曲面 S の単位法線ベクトルとすると, 以下の問いに答えよ.

- (1) e_r, e_θ, e_z を i, j, k および θ を用いて表せ.
- (2) $\frac{\partial e_r}{\partial r}, \frac{\partial e_r}{\partial \theta}, \frac{\partial e_\theta}{\partial r}, \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial e_z}{\partial r}, \frac{\partial e_z}{\partial \theta}$ を円筒座標系で表せ.
- (3) 曲面 S を円筒座標系で表せ.
- (4) n を円筒座標系で求めよ.
- (5) ベクトル場 A が

$$A = \theta z e_\theta + \sqrt{2r^2 + 1} e_z$$

で与えられるとき, 次の面積分

$$\int_S A \cdot n dS$$

を求めよ.

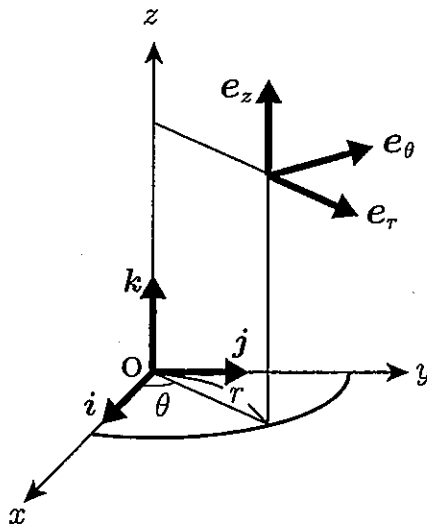


図1

平成 29 年度 秋季募集
(平成 29 年 10 月・平成 30 年 4 月入学)
東北大学大学院機械・知能系入学試験

試験問題冊子

数学 B MATHEMATICS B

平成 29 年 8 月 29 日(火) 13:30 - 15:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票が配布されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 3 題から 2 題を選び解答すること。選択した問題を選択票に記入すること。問題ごとに 2 枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 実関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数は次のように与えられる.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

ただし,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

である. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ のフーリエ級数は以下のように与えられる.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

このとき, a_n と b_n をそれぞれ c_n および c_{-n} を用いて表せ.

(2) 次の関係を示せ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

ただし, m と n は整数である.

(3) $f(x) = \sum_{k=1}^4 \cos^k x$ をフーリエ級数に展開せよ.

2. 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $f(t)$ の n 階微分のラプラス変換を導け. ただし, n は正の整数とする.
- (2) 問 (1) の結果を用いて, $\sin at$ と $\cos at$ のラプラス変換をそれぞれ求めよ. ただし, a は正の定数とする.
- (3) 次の関係式を導け.

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] = F(s)G(s)$$

ただし, 関数 $g(t)$ のラプラス変換を $G(s)$ とする.

- (4) 以下の方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$x(t) - \int_0^t \sin 2(t-\tau) x(\tau) d\tau = \sin 2t + \cos 2t$$

3. 関数 $u(x, y)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+3y}$$

を満足する. 2つの異なる実数 s, t を用いて, $\xi = x + sy, \eta = x + ty$ なる座標変換を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ をそれぞれ u, ξ, η を用いて表せ.

(2) 関数 u が満足する ξ と η に関する偏微分方程式を求めよ.

(3) 問(2)の結果において, $s=0, t=1$ として, 一般解 $u(x, y)$ を求めよ.

平成 29 年度 秋季募集
(平成 29 年 10 月・平成 30 年 4 月入学)
東北大学大学院機械・知能系入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS
流体力学	FLUID DYNAMICS
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS
制御工学	CONTROL ENGINEERING
材料物性学	MATERIALS SCIENCE
電磁気学	ELECTROMAGNETICS
量子力学	QUANTUM MECHANICS

平成 29 年 8 月 30 日(水) 9:00 - 12:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票 2 枚が配布されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 8 科目の中から 2 科目を選択して、選択した科目の問題すべてについて解答すること。選択した科目を選択票に記入すること。1 科目に 2 枚綴 1 組を使用すること。各科目とも 1 問につき 1 枚の答案用紙を使用すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

熱力学 THERMODYNAMICS

1. 三重点にある水を考える. 固相, 液相および気相における水の比体積をそれぞれ v_s , v_l および v_g とし, 各相の比エントロピーをそれぞれ s_s , s_l および s_g とする. また, 水の蒸発熱, 融解熱 および昇華熱をそれぞれ r_v , r_f および r_s とし, 三重点の温度を T_t とする. 以下の問いに答えよ.

(1) T_t , s_s , s_l および s_g を用いて r_v , r_f および r_s を表せ.

(2) 次式が成り立つことを示せ.

$$r_s = r_v + r_f$$

(3) 比ギブス自由エネルギーの式を用いて, クラペイロン-クラウジウスの式を導け.

(4) 圧力-温度 (p - T) 線図上の三重点近傍において, 昇華曲線の傾き $\left(\frac{dp}{dT}\right)_s$ は蒸発曲線の

傾き $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ より大きいことを示せ. ただし, 以下の式が成り立つとする.

$$v_g \gg v_s$$

$$v_g \gg v_l$$

$$r_s > r_v$$

2. 定常流動系において1 kgの理想気体が状態1から状態2に変化する準静的過程を考える。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは無視できるものとする。状態1におけるこの気体の圧力、比体積、温度、比内部エネルギー、比エンタルピーをそれぞれ p_1 , v_1 , T_1 , u_1 , h_1 とし、状態2におけるこれらの状態量をそれぞれ p_2 , v_2 , T_2 , u_2 , h_2 とする。また、気体定数を R とする。 $p_1 > p_2$ および $v_1 < v_2$ であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) h_1 を u_1 , p_1 および v_1 で表せ。
- (2) この過程において気体に加えられた熱量が q_{12} であるとき、絶対仕事および工業仕事(定常流動系における仕事)を求めよ。また、これらに相当する領域を圧力-比体積 ($p-v$) 線図上に示せ。
- (3) この過程が等温過程であるとき、絶対仕事と工業仕事の大きさが等しいことを示せ。
- (4) この過程が断熱過程であるとき、絶対仕事と工業仕事のどちらが大きいかを示せ。また、その理由を流動仕事の概念を用いて説明せよ。

流体力学 FLUID DYNAMICS

1. xy 平面において、非粘性・非圧縮性流体の2次元渦無し流れを考える。この流れの x 方向の速度成分 u , y 方向速度成分 v が

$$u = ax^2 + by^2 + c, \quad v = dxy \quad (a, b, c, d: \text{定数})$$

と与えられるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 連続の式が成り立つために、 a, b, c, d が満たすべき条件を求めよ。
- (2) 流れが渦無しであるために、 a, b, c, d が満たすべき条件を求めよ。
- (3) $d = 2$ のとき、速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ と流れ関数 $\psi(x, y)$ を x, y, c を用いて表せ。ただし、 $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$ であるものとする。

流体力学 FLUID DYNAMICS

2. 図1に示すように、車輪の付いた水槽の横穴から密度 ρ の水が水平に噴き出し、その反作用により水槽は水平な路面の上を一定の加速度 α で移動している。重力加速度 g は鉛直下向きで、水面は水平面に対して角度 θ 傾いている。横穴の断面積は A 、横穴は右壁に沿って水面から深さ H の位置にあり、横穴から見た水の噴き出し速度は U で一定である。水槽は十分に大きく、水槽と水槽内の水の合計質量 M 、水面の形と高さの時間的な変化は無視できるものとする。また、水槽の周囲の圧力は大気圧とし、水の粘性と水槽の移動に対する摩擦抵抗は無視する。次の問いに答えよ。

- (1) 水槽から見て、放出される水が持ち出す単位時間あたりの運動量を ρ, A および U で表せ。
- (2) 加速度 α を ρ, A, U および M で表せ。
- (3) 角度 θ を α と g で表せ。
- (4) 噴き出し速度 U を求めよ。

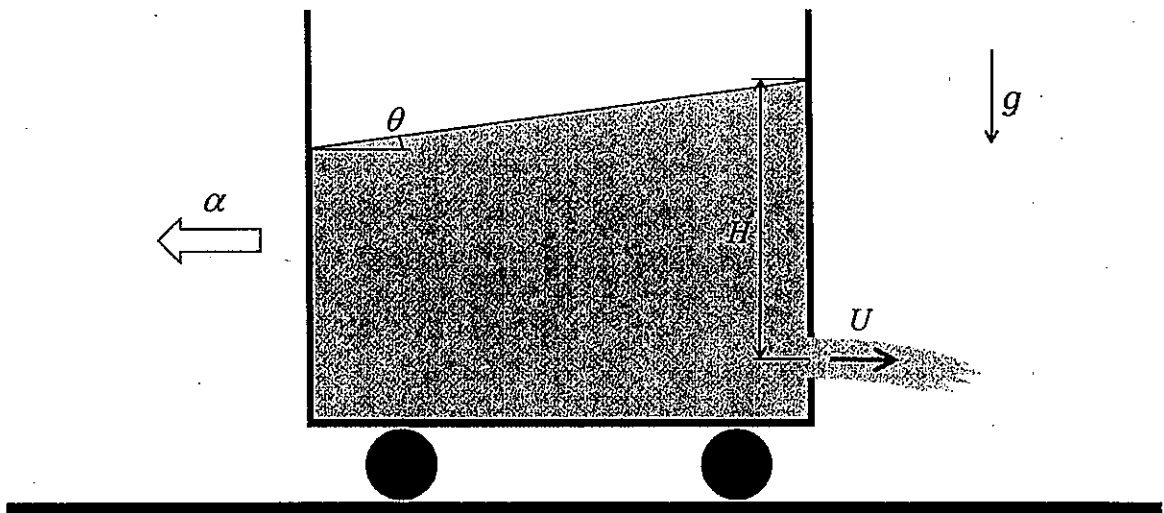


図1

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

1. 図1に示す段付き丸軸 ABCD を考える. この軸は3つの部分から構成されており, AB 部分は長さ L , 外径 $2d$, 内径 d の中空軸, BC 部分は長さ L , 直径 $2d$ の中実軸, CD 部分は長さ L , 直径 d の中実軸である. また, この断付き丸軸のせん断弾性係数は G とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 図1(a)に示すように, この軸がA端で剛体壁に固定され, D端でねじりモーメント M_t を受けるとき, AB部分, BC部分, CD部分の比ねじれ角をそれぞれ求めよ. また, D端におけるねじれ角も求めよ.
- (2) 図1(b)に示すように, この軸が両端A, Dで剛体壁に固定され, 位置Cでねじりモーメント M_t を受けるとき, A端, D端における反ねじりモーメント M_{tA} , M_{tD} をそれぞれ求めよ. また, C点におけるねじれ角も求めよ.

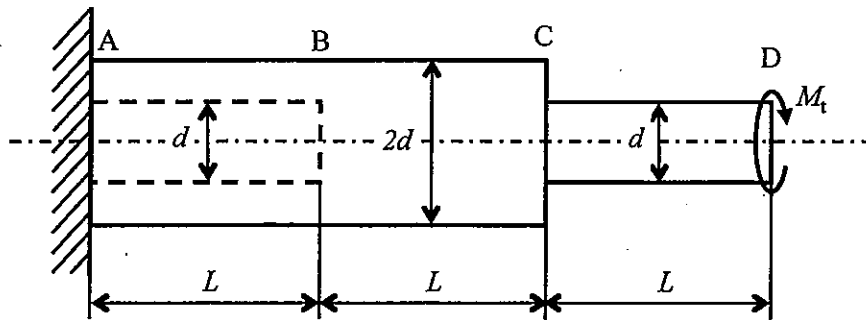


図 1(a)

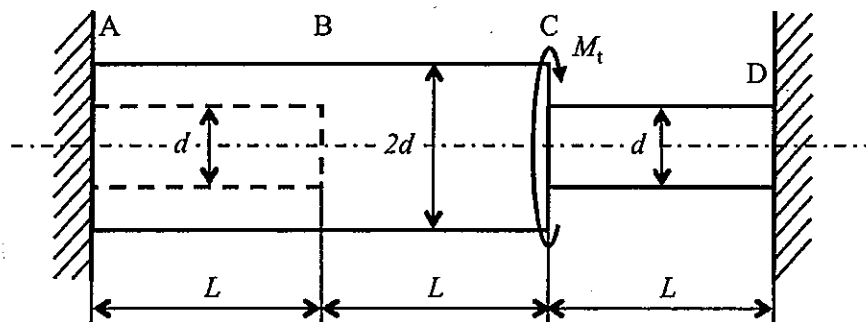


図 1(b)

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

2. 長さ L の真直はり AB が、図 2 に示すように、C 点で鉛直下向きに集中荷重 W の作用を受けている。AC と BC の長さは、それぞれ a および b である。また、はりの曲げこわさは EI とし、はりの自重は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 図 2(a) のように、はりが両端 A, B で単純支持されている。C 点におけるはりのたわみ y_c を求めよ。

(2) 図 2(b) のように、はりが両端 A, B で、剛体の天井に鉛直方向に固定された初期長さが同じ 2 つのばね AD と BE により支持されている。2 つのばねのばね定数を k とし、ばねの変形は微小であるものとする。ばねの自重は無視できるものとして、C 点の鉛直変位 δ_c を求めよ。

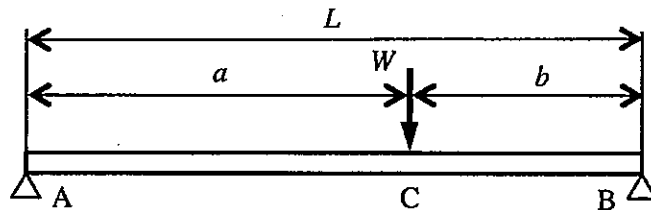


図 2(a)

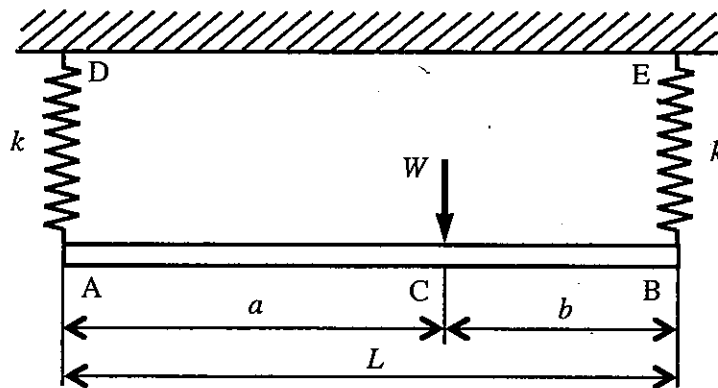


図 2(b)

1. 図1に示すような、2つのばねと2つの一様な剛体棒 AB および CD からなる平面内の振動系を考える。剛体棒は点 E と点 D でピン支持されており、点 B と点 C は質量のない剛体リンクを介して連結されている。2つの剛体棒の質量および長さはそれぞれ m と L であり、両方のばねのばね定数は k である。剛体棒は、静的釣り合い位置を中心に微小回転振動する。剛体棒 AB の釣り合い位置からの時刻 t における回転角を $\theta(t)$ とする。ばねの質量と水平方向の変形は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。

- (1) 剛体棒 AB の点 E まわりの慣性モーメント J_{AB} を求めよ。
- (2) 剛体棒 CD の釣り合い位置からの回転角 $\varphi(t)$ を $\theta(t)$ を用いて表せ。
- (3) 系の運動エネルギーを求めよ。
- (4) 系のポテンシャルエネルギーを求めよ。
- (5) 系の運動方程式を導け。

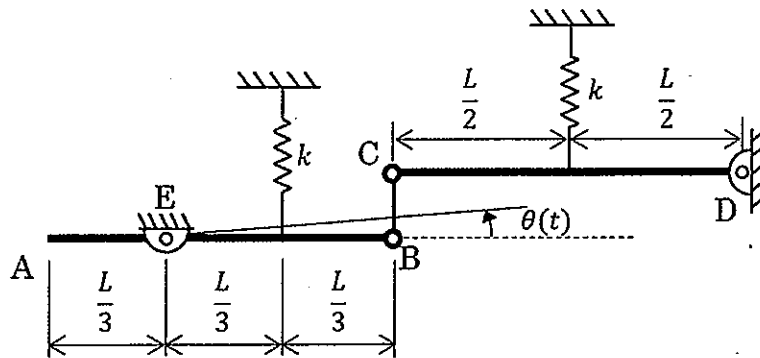


図 1

2. 図2に示すような、3つの台車および5つのばねからなる振動系を考える。質量 m_1 の台車1は水平面上におかれ、ばね定数 k_1 のばねで壁と連結されている。質量 m_2 の台車2は台車1上におかれ、ばね定数 k_2 の2つのばねで台車1と連結されている。また、質量 m_3 の台車3は台車2上におかれ、ばね定数 k_3 の2つのばねで台車2と連結されるとともに、強制力 $F(t) = P \sin \omega t$ で水平方向に加振されている。ここで、 P は強制力の振幅、 ω は角振動数、 t は時間である。3つの台車は摩擦なく水平方向にのみ移動する。台車1、2および3の静的釣り合い位置 O からの絶対変位をそれぞれ x_1 、 x_2 および x_3 とする。ばねの質量は無視できるものとする。振動系が定常状態にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) それぞれの台車に対する運動方程式を導け。
- (2) $m_1 = m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = k$, $k_2 = k_3 = k/2$ のとき、系のすべての固有角振動数を求めよ。
- (3) 問(2)の条件下で、 x_3 が0となる ω を求めよ。また、そのときの x_2 に対する x_1 の振幅比を求めよ。

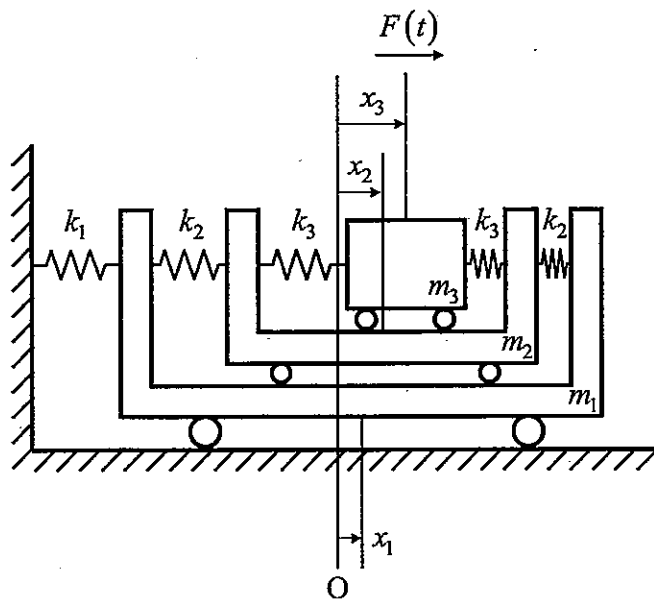


図 2

制御工学 CONTROL ENGINEERING

1. 図1に示すフィードバック制御系を考える。ここで、

$$G(s) = \frac{k}{s(2s+1)(s+4)}$$

であり、 k は正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) このシステムの一巡伝達関数を求め、そのベクトル軌跡の概形を描け。
- (2) 一巡伝達関数の位相が -180° となるときの角周波数を位相交差周波数という。このシステムの位相交差周波数を求めよ。
- (3) このシステムが安定限界となる k の値を求めよ。
- (4) このシステムの入力 $U(s)$ から出力 $Y(s)$ への伝達関数を示し、安定となる k の条件を求めよ。
- (5) このシステムにおける定常速度偏差 e_v が $e_v \leq 0.4$ となる k の条件を求めよ。

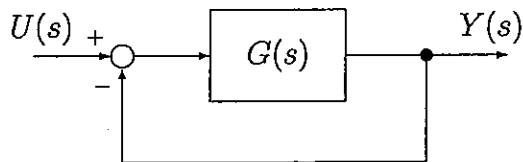


図1

2. 以下の問いに答えよ.

(1) 次式で表されるシステムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ただし, $u(t)$ は入力, $y(t)$ は出力, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ は状態ベクトルである. このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ.

(2) 問 (1) のシステムの入力から出力までの伝達関数を求めよ.

(3) 問 (1) のシステムを可制御正準形

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

にする座標変換 $x(t) = Tz(t)$ を考える. ただし $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$ である. 変換行列 T と定数 a_1, a_2, c_1, c_2 を定めよ.

(4) 問 (3) のシステムをブロック線図で表せ. 図中に u, y, z_1, z_2 を明示すること.

(5) 問 (1) のシステムに状態フィードバック $u(t) = -[k_1 \ k_2]x(t)$ を適用することを考える. 閉ループ系の特性方程式が $s^2 + \alpha s + \beta = 0$ となるとき, フィードバックゲイン k_1, k_2 を定数 α, β を用いて表せ.

(6) 問 (5) において, 状態フィードバックを適用した制御系が漸近安定となるための k_1, k_2 の条件を求めよ.

1. 金属材料に応力が負荷されると材料内部で転位の増殖が起こる。この転位の増殖の機構について下記の問いに答えよ。ここで、材料中の転位のバーガースベクトルの大きさを b 、この金属材料の剛性率を G とする。
 - (1) 図1にあるように、2本の転位との交差によって、すべり面上で両端を点 A と B で固定された転位切片 AB に、図のようにせん断応力 τ が作用した時に起こる転位の増殖機構の名称を記せ。
 - (2) 両端を固定されたこの転位切片 AB のすべり面上で、転位切片に垂直にせん断応力 τ が働くと、すべり面上で図2のように転位切片が張り出してくる。転位に働く力 f が $f = \tau b l$ と表せるとすると、この転位切片に働く張力 T を求めよ。ここでせん断応力がかかっていないときの転位切片の長さを l 、転位切片が張り出す角度を θ とする。
 - (3) 転位の単位長さ当たりのエネルギー E_d が $E_d = Gb^2$ と表されるものとする。この関係を使って τ と転位切片の張り出し角 θ との関係を示せ。また τ の最大値 τ_{\max} を求めよ。
 - (4) せん断応力 τ がこの τ_{\max} を超えたとき転位が増殖する。その様子を図を描いて説明せよ。
 - (5) 金属材料の塑性変形に及ぼすこの転位の増殖機構の役割を説明せよ。
 - (6) ランダムな転位配列の場合、転位密度を ρ_d とすると、 l は $l = \rho_d^{-1/2}$ と表される。この時、この材料の降伏応力 k を ρ_d の関数として表せ。

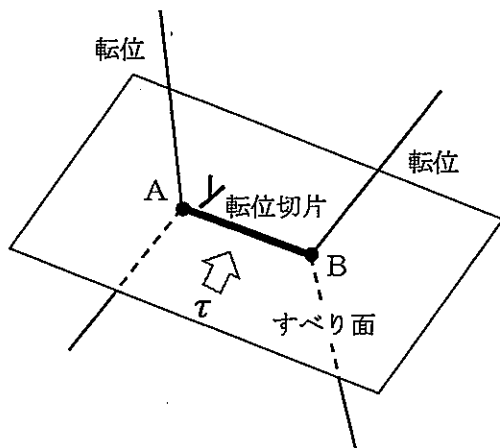


図1 2本の転位との交差によって両端をすべり面上の点 A と B で固定された転位切片 AB

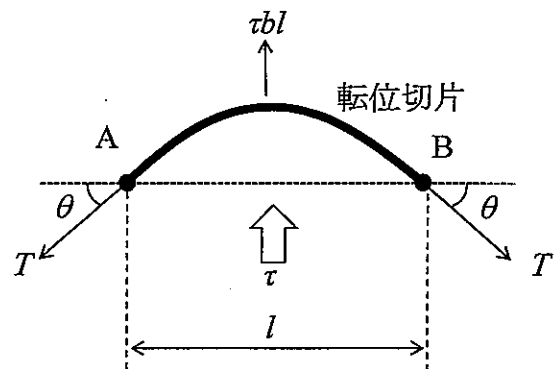


図2 転位切片 AB にすべり面上でせん断応力 τ が働き、転位切片が張り出した状態

2. 973 K で、鉄板の片面が浸炭雰囲気、反対面が脱炭雰囲気にさらされていると仮定する。ここで炭素拡散の定常状態が成り立っており、炭素濃度は鉄板の浸炭側表面から深さ 5.0×10^{-3} m 地点では 1.2 kg/m^3 、深さ 1.0×10^{-2} m 地点では 0.8 kg/m^3 であった。脱炭雰囲気にさらされた表面直下の炭素濃度は零であったとする。この温度における鉄中の炭素の拡散係数は $3.0 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。以下の問いに答えよ。必要であれば気体定数 $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, $e = 2.72$, $\ln 2 = 0.69$, $\ln 10 = 2.30$ を用いよ。

- (1) 鉄板を通過する炭素の流束を求めよ。
- (2) 浸炭側表面から深さ 1.0×10^{-3} m 地点の炭素濃度を求めよ。
- (3) 鉄板の厚さを求めよ。
- (4) 振動因子を $6.0 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。この時の拡散の活性化エネルギーを求めよ。
- (5) 炭素の拡散係数が 973 K における拡散係数の $1/2$ となる温度を求めよ。

1. 図 1 に示すように大きさが等しく符号の異なる 2 個の点磁荷 $+q_m$ と $-q_m$ が微小距離 s だけ離れて存在するものを磁気双極子と呼ぶ。磁気双極子モーメントは、 $m = q_m s$ で定義される。以下の問いに答えよ。ただし、透磁率として μ_0 を用いよ。

- (1) 図 1 に示す磁気双極子と図 2 に示す電流 I が流れる半径 a の円形コイルそれぞれがつくる磁力線を描け。
- (2) 磁場の強さ H は磁気スカラーポテンシャル ϕ_m により $H = -\nabla\phi_m$ として求めることができる。点磁荷 q_m から距離 R だけ離れた点の ϕ_m は、

$$\phi_m = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 R}$$

と表すことができる。図 1 に示す磁気双極子について、 z 軸上の点 P_1 ($z = z_1, z_1 \gg s$) における磁場の強さ H を求めよ。

- (3) 図 2 に示す電流 I が流れる半径 a の円形コイルが z 軸上の点 P_2 ($z = z_2, z_2 \gg a$) につくる磁束密度 B を求めよ。
- (4) 問 (2) と問 (3) の結果において、磁気双極子による磁場が円形コイルによる磁場と等価であると仮定するとき、磁気双極子モーメントの大きさは、 $m = \mu_0 I \pi a^2$ で表されることを示せ。

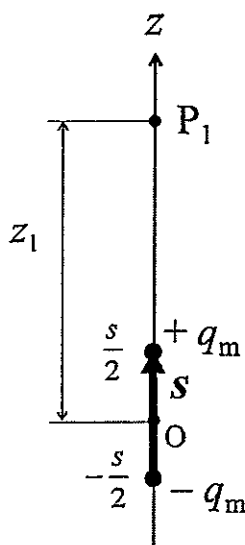


図 1

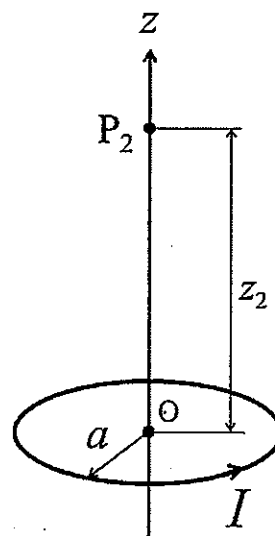


図 2

2. 図3に示すように、同軸上に2つのソレノイドコイル C_1 、 C_2 が置かれており、それぞれのコイルの長さは L 、巻き数は N である。また、コイル C_1 、 C_2 の半径を、それぞれ r_1 、 r_2 ($r_1 > r_2$)とする。コイル C_1 は交流電源がつながれており、 $I = I_0 \sin(\omega t)$ の電流が流れている。また、コイル C_2 は、電気抵抗 R とスイッチがつながれており、スイッチは開いている。以下の問いに答えよ。ただし、透磁率を μ_0 とし、コイルの端部の影響およびコイルの電気抵抗は無視する。

- (1) 変位電流が無視できる場合の磁場の強さ H と電流密度 J の微分形の関係式から、積分形の関係式を導出せよ。
- (2) 磁束密度 B と電場 E の微分形の関係式から、積分形の関係式を導出せよ。
- (3) コイル C_1 内の磁場の強さを求めよ。
- (4) 交流電源の電圧を求めよ。さらに電源の供給電力を求めよ。
- (5) コイル C_2 の両端に発生する電圧を求めよ。
- (6) スwitchを閉じた場合、コイル C_2 の両端に発生する電圧はどのように変化するかを説明せよ。さらに、問(4)で求めた電源の供給電力はどのように変化するかを説明せよ。

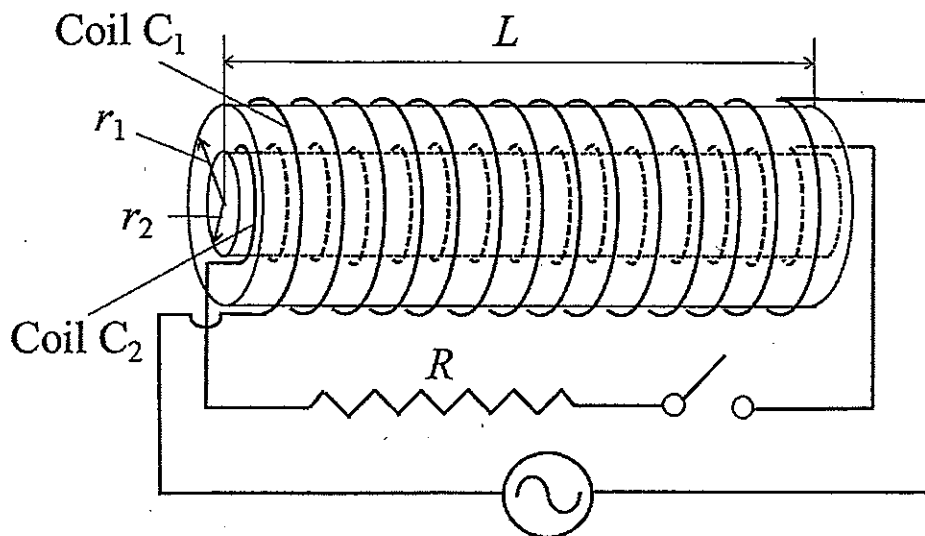


図 3

量子力学 QUANTUM MECHANICS

1. ある平面内において、座標原点から一定距離 r 離れている円周上を自由に運動する質量 m 、エネルギー E の粒子の波動関数 $\varphi(r, \theta)$ を考える. 二次元極座標のラプラシアンは $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ で与えられる. 以下の問いに答えよ.
- (1) この粒子に対する時間に依存しない二次元シュレーディンガー方程式を極座標 (r, θ) を用いて示せ.
 - (2) $\varphi(r, \theta)$ が満たすべき周期的境界条件を示せ.
 - (3) 規格化された波動関数 $\varphi(r, \theta)$ を求めよ.
 - (4) この粒子のエネルギー E を求めよ.
 - (5) ある与えられた角運動量に対して、この粒子の位置は正確に特定することができないことを示せ.

2. 光量 P [W], 波長 λ [m] の単色光が照射された金属板から放出される光電子を考える. 個々の光電子のエネルギーは E [J] である. 以下の問いに答えよ. ただし, 真空中における光速を c [m/s], プランク定数を h [J·s], 金属板の仕事関数を w [J] とする.

- (1) w を c, h, E, λ を用いて表せ.
- (2) 単位時間当たり発生する単色光の光子数を P, c, h, λ を用いて表せ.
- (3) 単色光の波長を λ から $\lambda/2$ にしたとき, 個々の光電子のエネルギーの変化量を求めよ.
- (4) 単色光の光量を P から $2P$ にしたとき, 個々の光電子のエネルギーの変化量を求めよ.