和

令和元年度 秋季募集
(令和２年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ａ MATHEMATICS A

令和元年８月27日(火) 9:30 － 11:00

注　意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．問題ごとに２枚の答案用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数学A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ．

（1）次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x}{x^4+x^2+1}\,dx$$

（2）次の定積分を求めよ．

$$\int_1^3 \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,dx$$

（3）次の広義積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,dx$$

数学 A　MATHEMATICS A

２．3×3 行列 A が次のように与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

（１）A の逆行列を求めよ．

（２）A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（３）$A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす係数 a，b および c を求めよ．ただし，I および O はそれぞれ単位行列および零行列である．

（４）$A^4 - 6A^3 + 7A^2 - 8A + 2I$ を求めよ．

数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 方向の基本ベクトルである．S を次の領域

$$V = \left\{\ (x, y, z) \mid\ a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2,\ \ 0 \le z \le c\ \right\}$$

の表面とする．ただし，a，b，c は $0 < a < b$ および $c > 0$ を満たす実数である．以下の問いに答えよ．

（1）$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ．

（2）$\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

次に，図1のように円筒座標系 (r, θ, z) を導入し，r，θ，z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_z$ とする．以下の問いに答えよ．

（3）$\boldsymbol{i}$ および $\boldsymbol{j}$ を円筒座標系で表せ．

（4）$\boldsymbol{A}$ を円筒座標系で表せ．

（5）積分

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

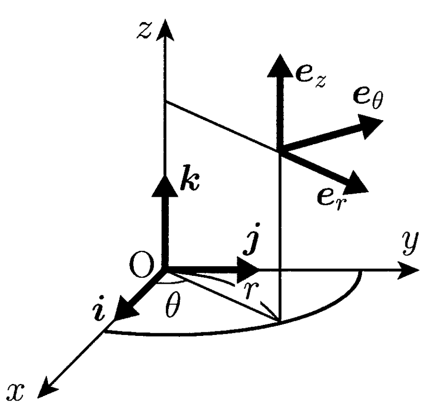

図1

和

令和元年度 秋季募集
(令和２年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和元年８月27日(火)　13:30 − 15:00

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと.

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること.

3．全ての問題を解答すること．問題ごとに２枚の答案用紙を用いること.

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと.

数学B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（１）$\dfrac{dy}{dx} = (y - 4x + 1)^2$

（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

（３）$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = \log x \qquad (x > 0)$

数学B　MATHEMATICS B

２．関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ および逆変換を次のように定義する．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

以下の問いに答えよ．

（１）次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を三角関数を用いて表せ．

$$f(x) = \begin{cases} -x & (0 < x \leq 1) \\ x - 2 & (1 < x \leq 2) \\ 0 & (x \leq 0,\ x > 2) \end{cases}$$

（２）問（１）で求めた $F(\omega)$ を用いて $|F(\omega)|^2$ を求めよ．

（３）$\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2\, dx$ を利用して，$\displaystyle \int_0^{\infty} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4}\, dx$ を求めよ．

数学B　MATHEMATICS B

３．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}[\,f(t)\,] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

以下の問いに答えよ．

（１）次の関係式を導け．

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s')\,ds'$$

ただし，$f(t)$ は $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt = 0$ を満たすものとする．

（２）$\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ．

（３）$\dfrac{\sin^2 t}{t}$ のラプラス変換を求めよ．

（４）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}\sin^2 t}{t}\,dt$ の値を求めよ．

和

令和元年度 秋季募集
(令和２年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

令和元年８月 28 日(水)　9:00 － 12:00

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，答案用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．

3．5 科目の中から 2 科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．１科目に 2 枚綴 1 組を使用すること．各科目とも１問につき１枚の答案用紙を使用すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．純物質 A および B のそれぞれについて，両側の端点を含む気液平衡線（蒸発曲線）を $\ln p - \dfrac{1}{T}$ 線図上に示す（図 1）．ただし，p は圧力，T は温度であり，ln は自然対数を表す．以下の問いに答えよ．

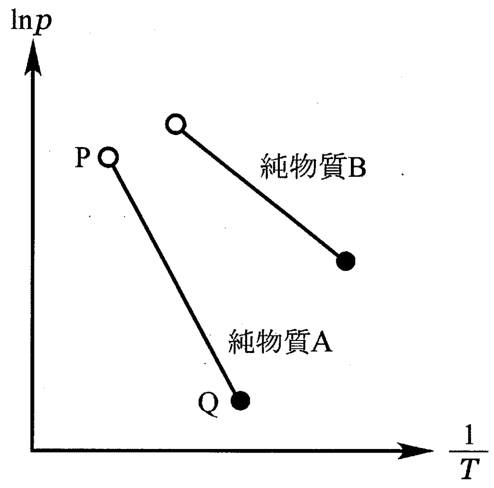

図 1

（1）端点 P および Q の名称を示せ．

（2）気液平衡状態を保ちながら圧力と温度が変化するとき，次式が成立することを示せ．ここで，s_G と v_G はそれぞれ気相の比エントロピーと比体積であり，s_L と v_L はそれぞれ液相の比エントロピーと比体積である．

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_G - s_L}{v_G - v_L}$$

（3）問（2）で示した $\dfrac{dp}{dT}$ を v_G，v_L，T および単位質量あたりの蒸発潜熱 r を用いて示せ．

（4）純物質 A と B の分子量が等しいとき，どちらの物質の単位質量あたりの蒸発潜熱が大きいかを理由を付して説明せよ．ただし，気相の比体積が液相のそれに対して十分に大きく，気相は理想気体の状態方程式に従うとする．また，純物質 A と B の蒸発潜熱はそれぞれ一定としてよい．

熱 力 学 THERMODYNAMICS

2．閉じた系における理想気体によるサイクルを考える．このサイクルは3つの準静的過程からなり，状態 1→2 の過程は断熱圧縮過程，状態 2→3 の過程は等圧加熱過程，状態 3→1 の過程は等積冷却過程である．状態 1 の温度を T_1，比エントロピーを s_1，状態 2 の温度を T_2，状態 3 の温度を T_3，比エントロピーを s_3 とする．また，この理想気体の比熱比を κ，気体定数を R とする．以下の問いに答えよ．

（１） この気体の定積比熱および定圧比熱を κ， R を用いて表せ．
（２） このサイクルの温度－比エントロピー（T–s）線図を描け．
（３） 状態 3→1 の過程における比エントロピー変化 $s_1 - s_3$ を T_1， T_3， κ， R を用いて表せ．
（４） 状態 3 の温度 T_3 を T_1， T_2， κ を用いて表せ．
（５） 状態 1→2 の過程の圧縮比が ε のとき，このサイクルの熱効率を ε， κ を用いて表せ．

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

1．以下の複素速度ポテンシャル$W(z)$により表される，非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える．

$$W(z) = Uz - m \log z$$

ここで，Uおよびmは正の実数，$\log$は自然対数である．zは$z = x + iy = re^{i\theta}$で表される複素変数であり，$x$および$y$はデカルト座標，$r$および$\theta$はそれぞれ半径方向および周方向の極座標で，$i = \sqrt{-1}$である．以下の問いに答えよ．

（1） この流れ場における速度ポテンシャル$\Phi(r, \theta)$と流れ関数$\Psi(r, \theta)$を求めよ．

（2） この流れ場におけるよどみ点の座標を求めよ．

（3） よどみ点を通る流線がy軸と交わる点の座標を求めよ．

（4） この流れ場の流線を描き，矢印で流れ方向を図示せよ．

（5） 上流無限遠方での圧力はp_∞，流体の密度はρで一定としたとき，よどみ点における圧力を求めよ．また，x軸上における圧力の分布を図示せよ．

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

２．図１のような，原点Ｏを中心とする半径a，bの２つの同心円筒があり，内側の円筒は静止し，外側の円筒は一定の角速度Ωで回転している．このとき，円筒の間を占める非圧縮粘性流体は二次元定常の周方向流れとなった．外力は無視でき，密度ρならびに粘性係数μが一定として，次の問いに答えよ．

（１）図１に示す円筒座標系(r, θ)を用いると，定常 Navier–Stokes 方程式の半径方向成分は

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)$$

周方向成分は

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

となる．ここで，p，u_rおよびu_θはそれぞれ圧力，速度の半径方向成分および速度の周方向成分である．u_rが０であり，u_θおよびpがrのみの関数であると仮定したとき，以下の問いに答えよ．

ａ）半径方向成分の式からr，ρ，pおよびu_θの関係式を導け．

ｂ）周方向成分の式からu_θとrの関係式を導け．

（２）問（１）のａ）で得られた関係式は，$u_\theta \neq 0$のとき圧力勾配が生じることを示している．この圧力勾配の原因を簡潔に述べよ．

（３）問（１）のｂ）で得られた関係式よりu_θをa，b，Ω，rを用いて表せ．ここで関係式は$u_\theta = Cr^k$の形の特殊解を有する．ただし，Cおよびkは定数である．

（４）内側の円筒表面に作用するせん断応力τをa，b，Ω，μを用いて表せ．

（５）内側の円筒にかかる単位軸長さあたりのトルクTをa，b，Ω，μを用いて表せ．

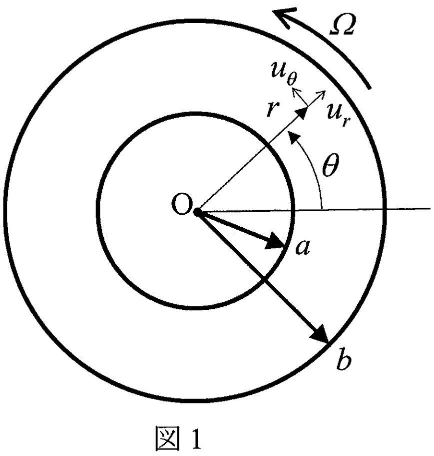

図１

1．図 1 に示す段付き中実丸軸 ABC を考える．この軸は，軸左端 A から段部 B までの直径は $2d$，長さは L，段部 B から軸右端 C までの直径は d，長さは L であり，軸左端 A で鉛直剛体壁に固定されている．軸のせん断弾性係数は G とする．以下の問いに答えよ．

（1）図 1(a)に示すように，位置 B にねじりモーメント M_{t1} を，位置 C に M_{t1} とは逆向きにねじりモーメント M_{t2} をそれぞれ作用させる．軸右端 C におけるねじれ角 ϕ_C を求めよ．

（2）問（1）において，最大せん断応力の値を求め，その発生位置を示せ．

（3）図 1(b)に示すように，軸右端 C において，軸の中心を通る水平線と丸軸表面との交点をそれぞれ D，F とする．長さ h，断面積 S，縦弾性係数 E の 2 つの棒が，点 D，F と水平剛体床にそれぞれ垂直にピン接合されている．位置 B にねじりモーメント M_t を作用させたとき，軸右端 C に生じる反ねじりモーメント M_C とねじれ角 ϕ_C を求めよ．

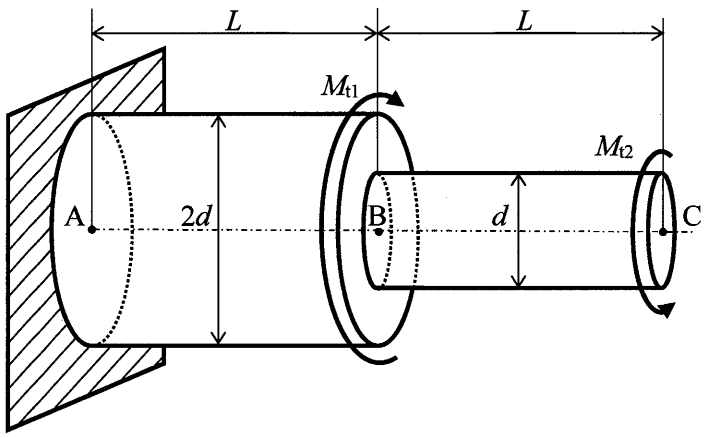

図 1(a)

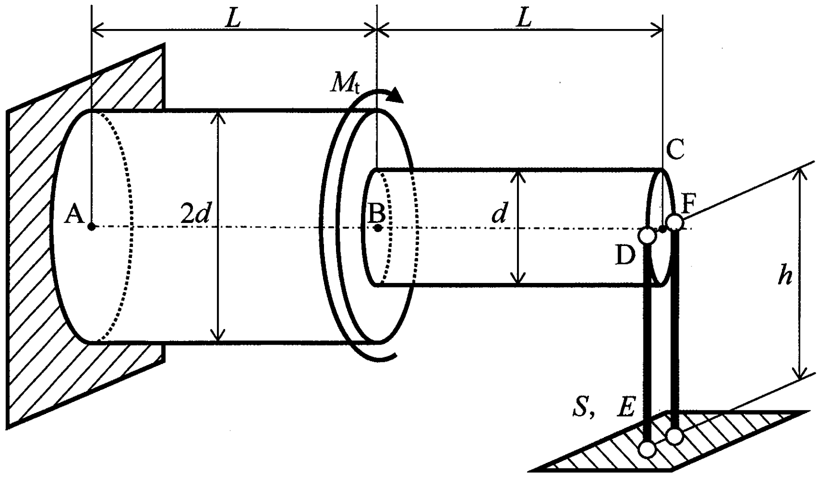

図 1(b)

2．図 2(a)上面図に示すように，端 A_1，A_2，D でそれぞれ垂直剛体壁に固定され，端 B_1，B_2，C に穴を有するはり A_1B_1，A_2B_2，CD がある．図 2(b)側面図に示すように，はり A_1B_1，A_2B_2 とはり CD の中立軸は上下に距離 d（$d << L$）だけ離れている．はり A_1B_1，A_2B_2 の長さは $2L$，はり CD の長さは L であり，はり A_1B_1，A_2B_2，CD の曲げこわさ EI はそれぞれ一定とする．穴の中心が一直線上になるようにはり CD に鉛直方向上方に外力を加えてたわませ，穴にピンを通して固定する．外力を解放すると，はり A_1B_1，A_2B_2，CD はつりあいを保った位置で静止する．ただし，ピンと穴の変形や摩擦は無視するものとし，ピンと穴の各直径は一致しているものとする．また，各はりの自重と中立軸の伸縮は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

（1） 端 B_1 と B_2 におけるたわみ δ を求めよ．

（2） はり A_1B_1 の端 B_1 におけるたわみ角 ϕ_{B_1} とはり CD の端 C におけるたわみ角 ϕ_C をそれぞれ求めよ．

（3） 端 D における反力 R_D を求めよ．

（4） 端 D における反モーメント M_D を求めよ．

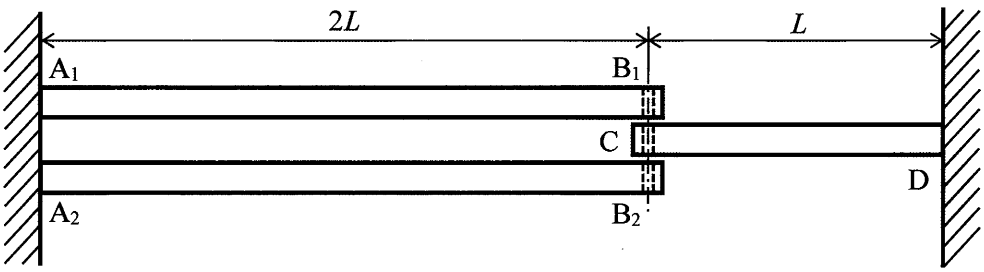

図 2(a) 上面図

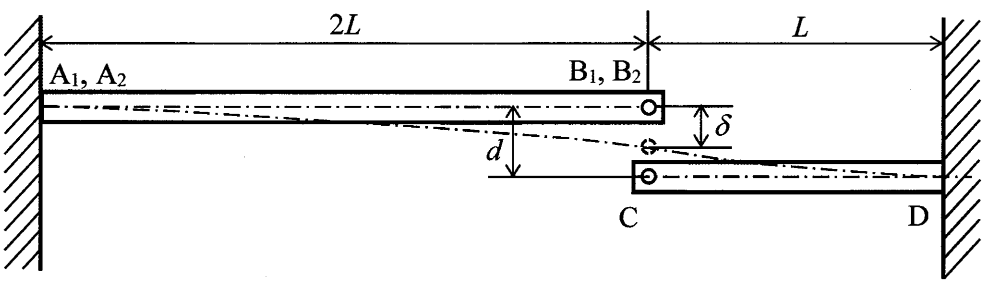

図 2(b) 側面図

機械力学 DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図1に示すような，質量 m，長さ $a+b$ の一様な剛体棒，ばね定数 k と $2k$ のばね，および粘性減衰係数 c のダッシュポットからなる振動系を考える．剛体棒はO点でピン支持されており，図の面内で釣り合い位置を中心に微小回転振動する．剛体棒の釣り合い位置からの回転角を $\theta(t)$ とし，t は時間とする．ダッシュポットは天井に接続され，天井は強制変位 $u(t) = A\sin\omega t$ で垂直方向に加振されている．ただし，A は強制変位の振幅，ω は角振動数である．ばねおよびダッシュポットの質量は無視できるものとする．系の応答が定常状態であるとき，以下の問いに答えよ．

（1）棒のO点まわりの慣性モーメント J を求めよ．

（2）系の運動方程式を求めよ．

（3）$c = 0$，$a = 2\ell$，$b = \ell$ のとき，系の固有角振動数を求めよ．

（4）$c \neq 0$，$a = 2\ell$，$b = \ell$ のとき，回転角 $\theta(t)$ を求めよ．

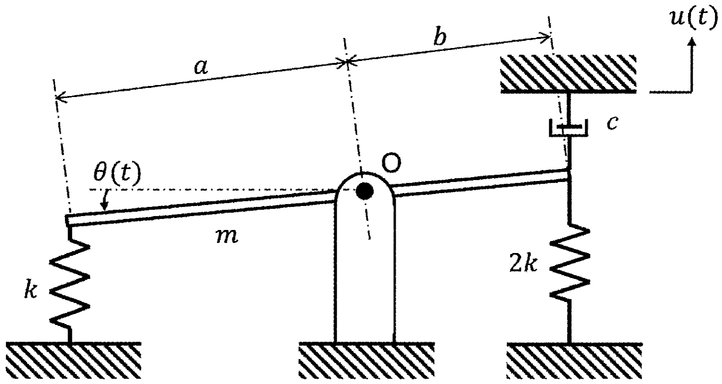

図1

2．図２に示すような半径 r_1, r_2, 慣性モーメント J_1, J_2 の２つのプーリー，ばね定数 k_1, k_2, k_3 の３つのばねからなる振動系を考える．２つのプーリーの回転中心は固定されており，３つのばねは糸で連結されている．糸は緩まず，糸とプーリーの間には滑りがないものとする．ばねと糸の質量は無視できる．プーリーの釣り合いの位置からの回転角はそれぞれ θ_1, θ_2 である．以下の問いに答えよ．

（１）系の運動方程式を求めよ．

（２）系の振動数方程式を求めよ．

（３）$J_1 = J$, $J_2 = 4J$, $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ のとき，系の固有角振動数を求めよ．

（４）問（３）で求めた各固有角振動数における θ_1 と θ_2 の振幅比を求めよ．

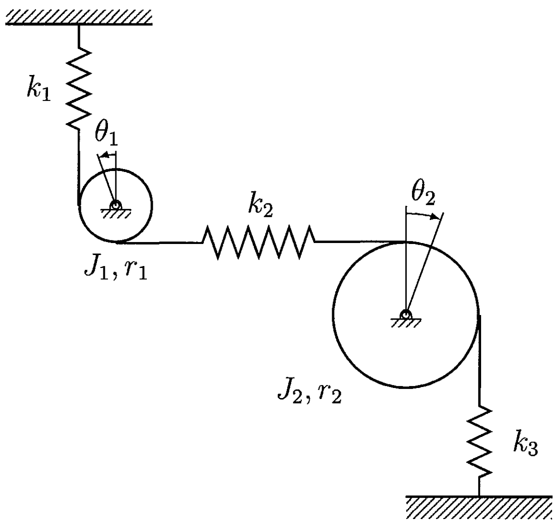

図２

制 御 工 学 CONTROL ENGINEERING

1．　以下の問いに答えよ．

（1）伝達関数が次式で与えられるとき，インパルス応答を求めよ．

$$G(s) = \frac{7s + 15}{s(s+3)(s+5)}$$

（2）図 1 の制御系を考える．

a) 制御系を安定とする k の範囲を求めよ．

b) 制御系の根軌跡を描け．

c) $k = 16$ のとき，ゲイン余裕の値を計算せよ．

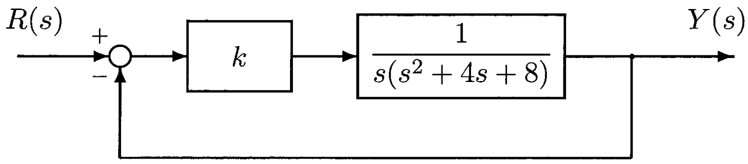

図 1

（3）周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のベクトル軌跡が図 2 で表されるとき，入力 $\sin(\omega_0 t)$ に対する出力を求めよ．

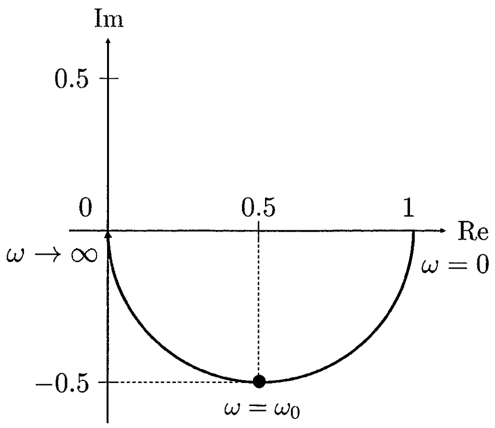

図 2

（4）図 3 に示すシステムを考える．外乱 $d(t) = t$ と入力 $r(t) = 0$ に対して定常値 $|y(\infty)| < 0.5$ となるための k の範囲を求めよ．

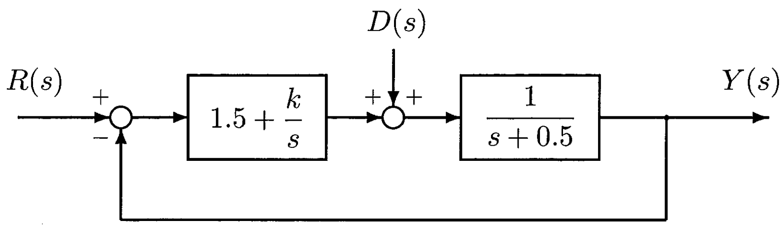

図 3

制御工学 CONTROL ENGINEERING

２． 以下の問いに答えよ．

（１）以下の式で表されるシステムを考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)$$

ただし $u(t)$ は入力，$y(t)$ は出力であり，状態ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = [x_1,\ x_2]^T$ とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [1,\ 2]$$

のとき，状態フィードバック $u(t) = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)$ によって閉ループ系を安定にする $\boldsymbol{k} = [k_1,\ k_2]$ の範囲を求めよ．

（２）問（１）において $\boldsymbol{k} = [9,\ 7]$ とする．閉ループ系を対角化する座標変換 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)$ と，対角化されたシステム $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}(t)$ を求めよ．

（３）以下の式で表されるシステムを考える．

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{g}v(t), \quad y(t) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{z}(t)$$

ただし $v(t)$ は入力，$y(t)$ は出力であり，状態ベクトルを $\boldsymbol{z}(t) = [z_1,\ z_2]^T$ とする．

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = [-1,\ -3]$$

であり，初期状態を $\boldsymbol{z}(0) = [0,\ 0]^T$ とするとき，単位ステップ応答を求めよ．

（４）問（３）のシステムに対し図 4 に示すような偏差積分フィードバック $v(t) = \lambda\xi(t)$ を考える．ここで λ は定数ゲイン，$r(t)$ は入力，$y(t)$ は出力である．

a) $[z_1,\ z_2,\ \xi]^T$ を状態ベクトルとする拡大系の状態方程式を導出せよ．

b) このシステムが安定となる λ の範囲を求めよ．

c) 単位ステップ入力に対する定常偏差 $e(\infty)$ の値を求めよ．

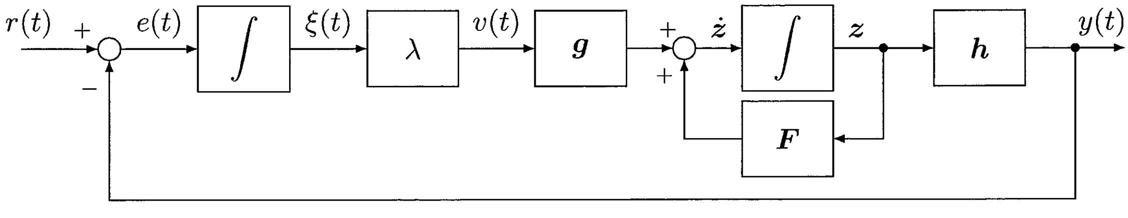

図 4