和

令和２年度 秋季募集
(令和３年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ａ　MATHEMATICS A

令和２年８月 25 日(火) 9:30 － 10:30

注　意

1. 本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．
2. 試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．
3. 全ての問題を解答すること．問題ごとに２枚の答案用紙を用いること．
4. 試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数学A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ．

（１）次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x \sin x}{\cos^3 x}\, dx$$

（２）次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x^2 - 4x - 2}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$$

（３）次の積分を求めよ．

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \qquad D = \left\{\, (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2x \,\right\}$$

2．xy 平面において２次形式

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - \sqrt{3}xy + \frac{5}{2}y^2$$

を考える．A を

$$f(x, y) = (x \;\; y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる対称行列とする．以下の問いに答えよ．

（１）A および A の固有値を求めよ．

（２）A を対角化する直交行列を１つ求めよ．

（３）$x^2 + y^2 = 1$ のもとで $f(x, y)$ の最小値と最大値を求めよ．

数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = z\,\boldsymbol{i} + e^{z}\,\boldsymbol{j}$$

により与えられる．ただし，x，y，z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．また，面 S が

$$S:\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1$$

により与えられる．以下の問いに答えよ．

（1）$\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

（2）S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ の z 成分は正とする．

（3）次の積分

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は問（2）で求めた S の単位法線ベクトルである．

和

令和２年度 秋季募集
(令和３年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和２年８月25日(火)　　13:30 － 14:30

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．問題ごとに２枚の答案用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数学B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（1）$\left(x^2 + y^2 e^{\frac{x}{y}}\right) \dfrac{dy}{dx} = xy$

（2）$2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 11\dfrac{dy}{dx} + 12y = \sinh x$

2．関数 $u(x,y)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < a,\ 0 < y < b)$$

および境界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

を満足する．ただし，$u(x,y)$ は定数関数でないとする．以下の問いに答えよ．

（1）$u(x,y) = P(x)Q(y)$ とするとき，$P(x)$ と $Q(y)$ が満たす常微分方程式を求めよ．

（2）問（1）における $P(x)$ と $Q(y)$ の一般解を求めよ．

（3）関数 $u(x,y)$ は境界条件 $u(x,b) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)$ を満足するものとする．問（2）の一般解を利用して $u(x,y)$ を求めよ．

数 学 B　MATHEMATICS B

3．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

以下の問いに答えよ．

（１）$\dfrac{d}{ds}F(s)$ の逆ラプラス変換を求めよ．

（２）$t\cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めよ．

（３）$\dfrac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ．

和

令和２年度 秋季募集
(令和３年４月入学)
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

令和２年８月26日(水) 9:30 － 10:30

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，答案用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．

3．5 科目の中から 2 科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．1 科目に 2 枚綴 1 組を使用すること．各科目とも 1 問につき 1 枚の答案用紙を使用すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．次の問いに答えよ．

（1）クラペイロン・クラウジウスの式を示し，使用した記号の意味を説明せよ．

（2）クラペイロン・クラウジウスの式にいくつかの仮定を用いることで，温度 T の純物質の飽和蒸気圧 p は以下のように導出される．

$$\ln p = A - B / T$$

ここで A と B は定数であり，ln は自然対数を表す．この導出で用いられる仮定をすべて述べよ．

熱 力 学 THERMODYNAMICS

2．理想気体を作動流体とするガスタービンがブレイトンサイクルで動作している．圧縮機の入口と出口の状態をそれぞれ状態 1 と状態 2，タービンの入口と出口の状態をそれぞれ状態 3 と状態 4 とする．また，それぞれの状態における温度を T_i（$i = 1, 2, 3, 4$）とする．このブレイトンサイクルについて，次の問いに答えよ．

（1）圧力－比体積（p–v）線図および温度－比エントロピー（T–s）線図を描き，状態 1, 2, 3, 4 を各々の線図に示せ．

（2）$T_1 / T_2 = T_4 / T_3$ を導け．

（3）$T_4 = 800$ K のとき，理論熱効率が 50%となる T_3 を求めよ．

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

1．図 1 に示すように，水平な水面に平行な速度 U の一様流中に，L 字型の円管の一部が水没して固定されている．L 字型円管は，流れ方向に平行な水平部と重力方向に平行な鉛直部からなる．L 字型円管の長さは鉛直部において $3b$ であり，流路断面積は鉛直部において A，水平部において $2A$ である．L 字型の円管の水平部は水深 b まで水没しており，鉛直方向座標 z は水平円管の中心軸 $z=0$ から上向きにとる．円管の直径は水深 b および円管水平部の長さに対して十分に小さいものとする．水の密度をρ，重力加速度を g とする．管路の損失や流体の粘性，表面張力を無視できるとし，以下の問いに答えよ．

（1） L 字型円管の鉛直部において，水柱が高さ $z=h$ で静止している場合を考える．ただし，h は $b<h<3b$ の範囲である．h を U と b，g を用いて表せ．

（2） L 字型円管の鉛直部の先端から一定速度 V で水が噴出している場合を考える．

a）噴出速度 V を U と b，g を用いて表せ．

b）L 字型円管を固定するために必要な水平方向の力を V と A，ρを用いて表せ．ただし，L 字型円管の外側に働く抵抗は無視する．

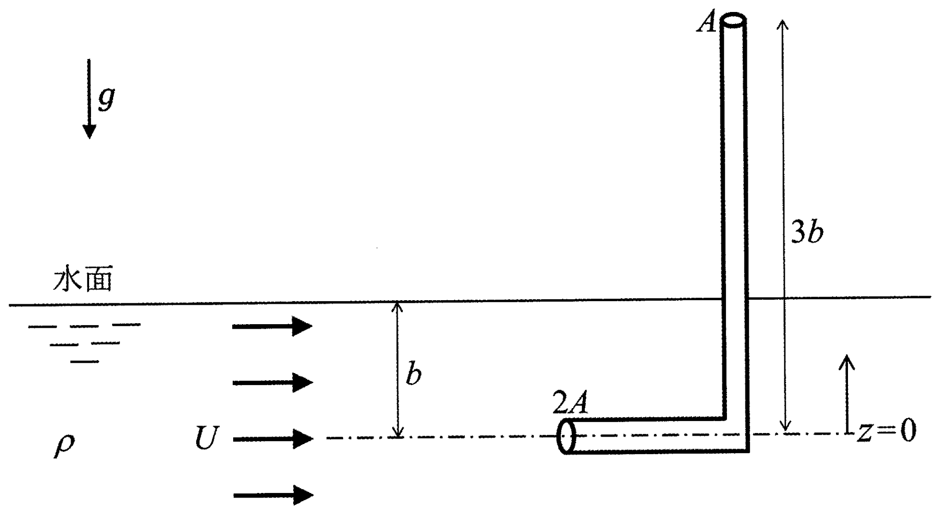

図 1

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

2．xy 平面において，非粘性・非圧縮性流体の 2 次元定常流れの速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ が

$$\phi(x, y) = 3x^2 + (2y+1)x - 3y^2 - 2y$$

で表されるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） x 方向の速度成分 u と y 方向の速度成分 v を，x，y を用いて表せ．

（2） u，v が連続の式を満たすことを示せ．

（3） この流れ場が渦なし流れであることを，渦度の定義式を用いて示せ．

（4） 流れ関数 $\psi(x, y)$ を求めよ．ただし，$\psi(0, 0) = 0$ とする．

材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

1．図 1 に示すように，円形断面の L 形片持はり ABC が，水平面上に A 端で剛体壁に固定されている．AB と BC の長さはそれぞれ a と b である．L 形片持はりのねじり剛性は GI_P であり，曲げ剛性は EI とする．なお，はりの自重は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

（1） 図 1(a)のように，ねじりモーメント T_1 を B 点で AB 部の軸線回りに図の向きに作用させる．AB 部に作用する内力の分布を図示せよ．また，C 端におけるはりの鉛直方向の変位を求めよ．

（2） 図 1(b)のように，問（1）におけるねじりモーメント T_1 に加えて，さらにねじりモーメント T_2 を C 端で BC 部の軸線回りに図の向きに作用させる．AB 部および BC 部に作用する内力の分布をそれぞれ図示せよ．

（3） 問（2）の負荷状態において，C 端におけるはりのねじれ角を求めよ．

（4） 問（2）の負荷状態において，C 端におけるはりの鉛直方向の変位を求めよ．

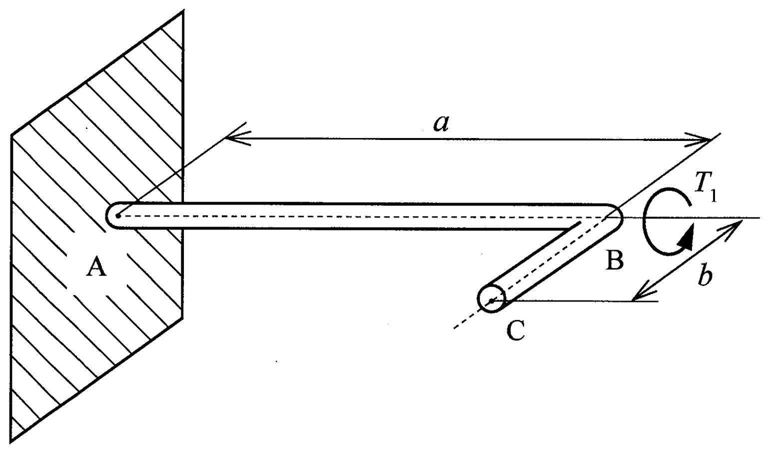

図 1(a)

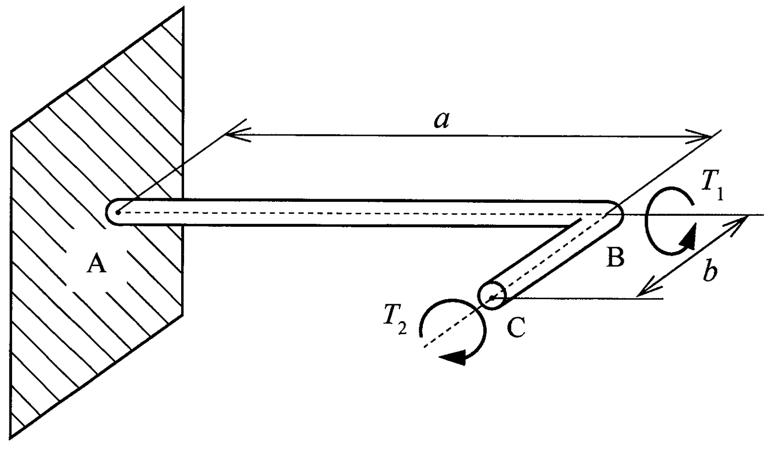

図 1(b)

本ページは空白です

機 械 力 学 DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図1に示すような，質量 m，質量の無視できる長さ ℓ の剛体棒，ばね定数 k のばね，減衰係数 c のダッシュポットからなる振動系を考える．剛体棒の一端は壁に点Oでピン支持され，もう一端に質量 m が取り付けられている．ばねとダッシュポットは並列に接続され，その一端は剛体棒に点Aで連結され，もう一端は天井に固定されている．点Oから点Aまでの距離は r である．天井は強制変位 $u(t) = a\sin\omega t$ で垂直方向に加振されている．ここで，a は強制変位の振幅，ω は角振動数，t は時間である．剛体棒は平衡状態において水平に位置する．剛体棒の平衡位置からの振れ角を θ とする．振れ角 θ が微小であるとき，以下の問いに答えよ．

（1）ばねの長さの変化を求めよ．

（2）ばねとダッシュポットを介して剛体棒の点Aに加わる力を求めよ．

（3）系の運動方程式を導け．

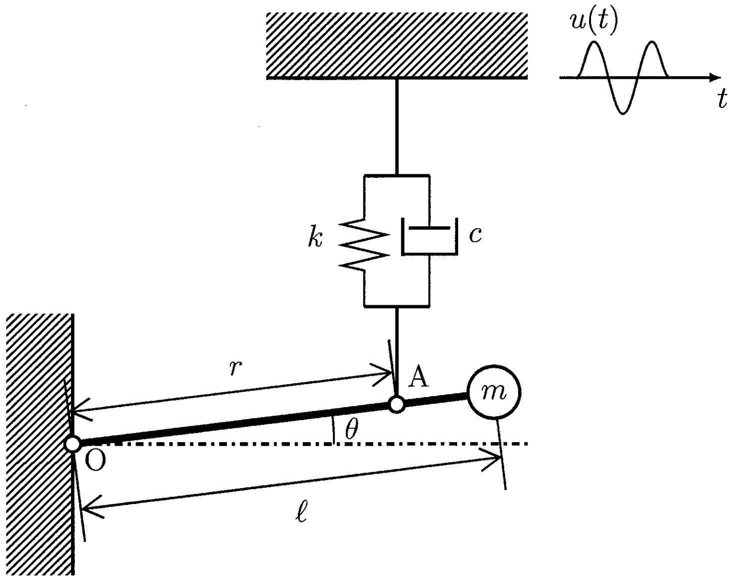

図1

2． 2つの質量m_1，m_2とばね定数k_1，k_2，k_3の3つのばねからなる振動系を考える．つりあい位置からの質量m_1およびm_2の変位を，それぞれx_1およびx_2とする．ばねの質量は無視できるものとすると，系の運動方程式は次式で表される．

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2$$

以下の問いに答えよ．

（1）$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = k_3 = k$，$k_2 = 2k$のとき，系の固有角振動数を求めよ．

（2）問（1）で求めた各固有角振動数におけるx_1とx_2の振幅比を求めよ．

制 御 工 学 CONTROL ENGINEERING

1． 以下の問いに答えよ．

（1） 図1に示すフィードバック制御系を考える．$R(s)$，$Y(s)$ はそれぞれ目標値 $r(t)$，出力 $y(t)$ のラプラス変換である．制御対象の伝達関数 $P(s)$，制御器の伝達関数 $C(s)$ は次式で与えられる．

$$P(s) = \frac{10}{s(s+10)}, \quad C(s) = \frac{k}{s+1}$$

k は定数である．

a) $k = 10$ のとき，開ループ系のベクトル軌跡が実軸と交わる座標を求めよ．

b) 制御系を安定とする k の範囲を求めよ．

c) $k \in [0, \infty)$ における根軌跡を描け．

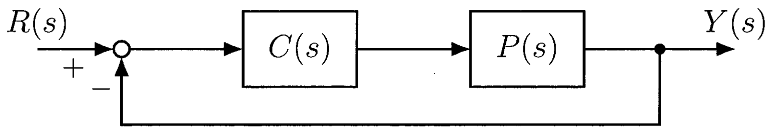

図1

2． 以下の問いに答えよ．

（1）微分方程式

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = au(t)$$

で表されるシステムを考える．ただし a は定数である．

a) このシステムの状態方程式を，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T$ と入力 $u(t)$ を用いて表せ．

b) このシステムが可制御でなくなるための a の条件を求め，そのときになぜ可制御でなくなるかを説明せよ．

c) $u(t) = 0$ とする．初期値 $x(0) = 1$，$\dot{x}(0) = 0$ に対するこの微分方程式の解 $x(t)$ を求めよ．

（2）状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

で表されるシステムを考える．ただし $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ は状態ベクトル，$u(t)$ は入力である．このシステムに状態フィードバック $u(t) = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}(t)$ を適用するとき，閉ループ系が安定になるための $\boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ の条件を求めよ．