和

令和3年度 秋季募集
東北大学大学院機械系4専攻入学試験

試験問題冊子

数学A　MATHEMATICS A

令和3年8月24日(火) 9:30 － 10:30

注　意

1. 本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．
2. 試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．
3. 全ての問題を解答すること．問題ごとに2枚の答案用紙を用いること．
4. 試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数学A　MATHEMATICS A

1．a を正の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

（1）次の積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr$$

（2）次の積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}\, dxdy$$

（3）n を 0 以上の整数とするとき，$F_n(a)$ を

$$F_n(a) = \int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\, dx$$

により定義する．

a）$F_0(a)$ を求めよ．

b）$F_1(a)$ を求めよ．

数学A　MATHEMATICS A

2．行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

により与えられる．a を実数とするとき，以下の問いに答えよ．

（1）A の固有値を求めよ．

（2）$A^3 - 5A^2 + aA$ を求めよ．

（3）$A^3 - 5A^2 + aA$ が 0 でない重複度 2 の固有値を持つとき，a の値を求めよ．

数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = (yz - y)\,\boldsymbol{i} + (xz - 3x)\,\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\,\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，x，y，z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．また，双曲面 S が

$$S:\ z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \qquad 0 \le z \le 2$$

により与えられる．また，$z = 2$ における S の境界を C とする．以下の問いに答えよ．

（1）$\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

（2）次の線積分

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{r}$ は C の位置ベクトルであり，線積分の向きは $+z$ 方向に進む右ねじの回転方向とする．

（3）次の面積分

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ の z 成分は負または0とする．

(ヒント：必要であればストークスの定理を用いよ．)

和

令和３年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和３年８月２４日(火)　13:00 － 14:00

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．問題ごとに２枚の答案用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数学B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（１）
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2z = \cos x \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} - 2y = -\sin x \end{cases}$$

（２）$y\sqrt{1+y^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

2．周期 2π をもつ関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x < \pi)$ のフーリエ級数展開を次のように定義する．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\, a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,\}$$

以下の問いに答えよ．

（１）次式を示せ．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\, f(x)\,\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

（２）周期 2π をもつ関数 $f(x) = x$ $(-\pi \leq x < \pi)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

また次式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

数学B　MATHEMATICS B

3．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

以下の問いに答えよ．

（1）次ページの図1に示すように，区間 $n \leq t < n+1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で $f(t) = r^n$ とする．$f(t)$ のラプラス変換を求めよ．ただし，r は実数とし，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-ns} = \frac{1}{1 - re^{-s}}$$

としてよい．

（2）任意の実数列 $\{a_n\}$ に対して，区間 $n \leq t < n+1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で関数 $g(t)$ が $g(t) = a_n$ と与えられる．$g(t)$ のラプラス変換を $G(s)$ とするとき，$\mathcal{L}\left[g(t+1)\right]$ を $G(s)$ と a_0 を用いて表せ．

（3）実数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が

$$a_{n+1} - 3a_n - 2^{n+1} = 0$$

を満たす．$a_0 = 4$ のとき，問（1）および問（2）の結果を用いて，a_n の一般項を求めよ．

$$\left(\text{ヒント：} \frac{e^{-s}}{(1-2e^{-s})(1-3e^{-s})} = \frac{-1}{1-2e^{-s}} + \frac{1}{1-3e^{-s}}\right)$$

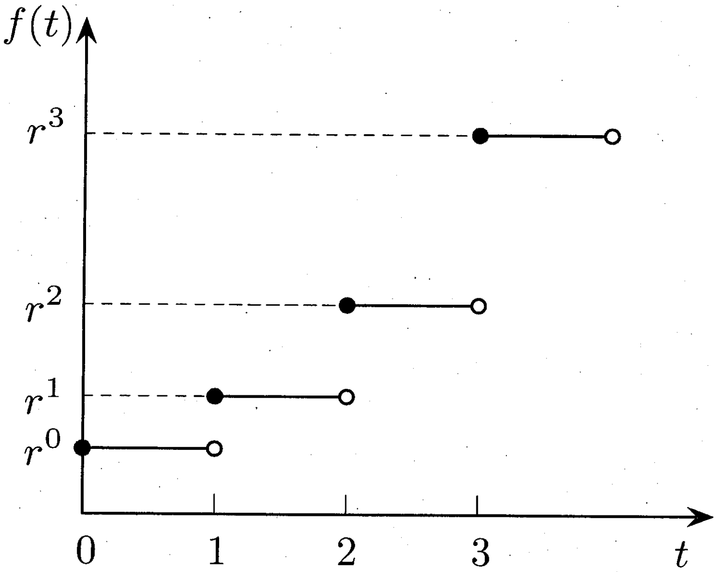

図 1

和

令和３年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~10

令和３年８月24日(火)　15:45 － 16:45

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，答案用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．

3．5科目の中から2科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．1科目に2枚綴1組を使用すること．各科目とも1問につき1枚の答案用紙を使用すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．ある理想気体で満たされた体積 V の断熱容器の系を考える．この理想気体の定圧比熱は c_p であり，断熱性の仕切りで領域 1 と 2 に分けられている．理想気体の質量および圧力は領域 1 と 2 で互いに等しくそれぞれ m，p である．また，領域 1 と 2 の温度はそれぞれ T_1，T_2 である．仕切りを取り去ると理想気体は混合する．なお，仕切りの体積は無視できる．以下の問いに答えよ．

（1） 混合後の系の温度を求めよ．

（2） 状態方程式を用いて，混合前後において系の圧力が変化しないことを示せ．

（3） 混合前後の系のエントロピー変化を求めよ．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

2．以下の問いに答えよ．ただし p，s，T，u，v はそれぞれ圧力，比エントロピー，温度，比内部エネルギー，比体積である．

（1）比ヘルムホルツ自由エネルギーの式 $f = u - Ts$ を用いて，次のマクスウェルの熱力学的関係式を導け．

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

（2）次の式を導け．

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

（3）理想気体の定積比熱は定数もしくは温度のみの関数であることを問（2）の式を用いて示せ．

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

１．以下の複素速度ポテンシャル$W(z)$により表される，非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える．

$$W(z) = C(1-i)\log z$$

ここで，Cは正の実数であり，logは自然対数である．zは$z = re^{i\theta}$で表される複素変数であり，rおよびθはそれぞれ半径方向および周方向の極座標で，$i = \sqrt{-1}$である．以下の問いに答えよ．

（１）この流れ場の速度ポテンシャル$\phi(r,\theta)$と流れ関数$\psi(r,\theta)$を求めよ．

（２）半径方向速度V_rと周方向速度V_θを求めよ．

（３）流体の密度はρで一定とし，無限遠方での圧力をp_∞としたときに，$r=1$における圧力p_1を求めよ．

（４）この流れ場の流線を表すものとして適切なものを図１a)～d)から１つ選べ．

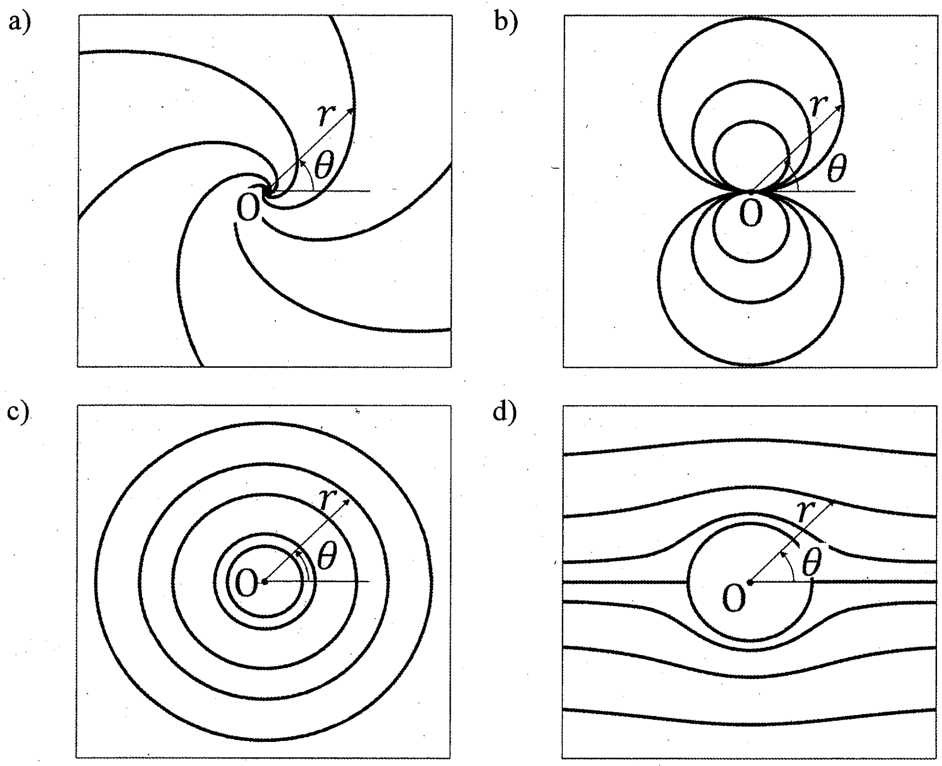

図１

流 体 力 学 FLUID DYNAMICS

2．図２に示すように，水槽に貯められた水が水槽に接続された円管から噴出している．円管は断面積 S_a で，水槽の水面から垂直距離 H の位置に水平に接続されている．円管は下流において断面積 S_b（$S_b > S_a$）の拡大円管部に接続している．拡大円管部には水柱があり，円管中心軸からの水柱の高さは d である．拡大円管部下流の円管の断面積は S_a となり，円管は垂直下方に曲がり水平管中心軸から距離 h の位置において流速 V で噴出する．円管内の流れは定常で，水槽や円管の周囲圧力を p_0，水槽内の深さ H の圧力を p_1，接続した水平円管内の圧力を p_2，拡大円管内の圧力を p_3 とする．水槽は十分に大きく水槽内の水は静止しているものとし，H は変化しない．円管の直径は距離 H，d，h よりも十分に小さく，円管各断面内において圧力ならびに流速は一様とする．水の密度は ρ で一定とし，重力加速度を g とする．また，円管内における損失は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

（１） p_1 を p_0，ρ, g, H を用いて表せ．

（２） 拡大円管部における速度 v を S_a, S_b, V を用いて表せ．

（３） V を g, H, h を用いて表せ．

（４） p_0, p_1, p_2, p_3 を大きい方から順番に不等号を用いて並べよ．

（５） 円管の断面積比 S_a/S_b を H, d, h を用いて表せ．

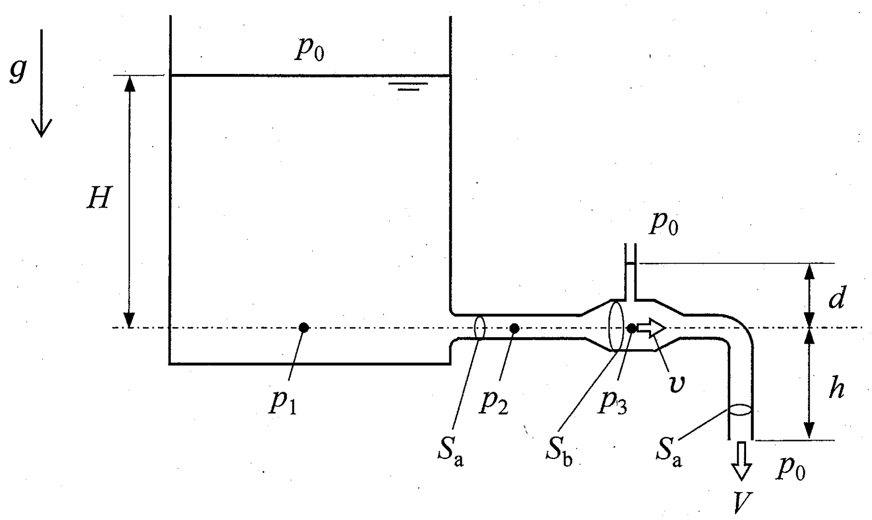

図２

材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

1．図1に示すように，3本の一様な棒部材 AD, CD, BD からなるトラス構造を考える．長さ L なる部材 CD は水平な剛体天井に鉛直にピンで結合されている．また，長さ $L/\cos\theta$ なる部材 AD, BD も一端を剛体天井にピン結合され，もう一端を節点 D で部材 CD とピン結合されている．部材 AD, BD と部材 CD のなす角度はそれぞれ θ とする．なお，各部材には応力は生じていないものとする．これらの部材の縦弾性係数，断面積および線膨張係数はそれぞれ $E, A, \alpha\,(>0)$ とする．部材の自重は無視するものとする．部材 CD のみ温度を ΔT 上昇させる時，以下の問いに答えよ．

（1）部材 AD, CD, BD に発生する軸応力をそれぞれ σ_{AD}, σ_{CD}, σ_{BD} とする．鉛直方向ならびに水平方向の力のつり合い式を示せ．

（2）σ_{AD}, σ_{CD}, σ_{BD} 間の関係式を求めよ．

（3）各部材の軸方向の変位 δ_{AD}, δ_{CD}, δ_{BD} を σ_{AD}, σ_{CD}, σ_{BD} を用いて表せ．

（4）σ_{AD}, σ_{CD}, σ_{BD} を求めよ．

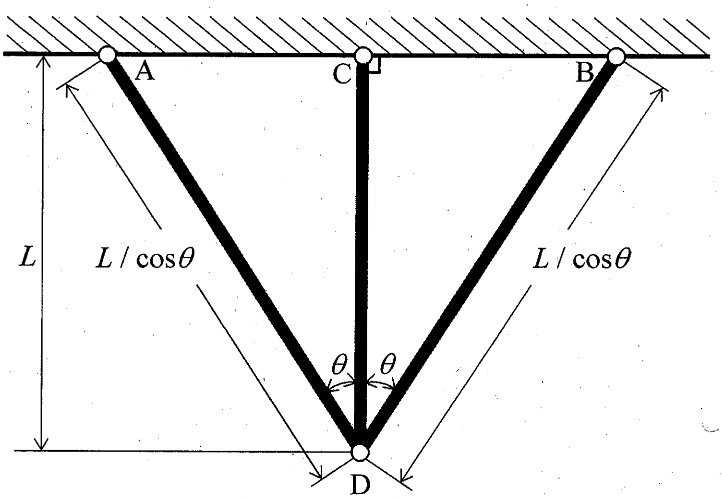

図1

2．図２(a)に示すように，長さ $2L$ のはり AB が左端 A で垂直剛体壁に固定されている．はりの曲げこわさを EI とし，はりの自重は無視するものとする．曲げモーメントは，はりを下に凸に曲げるように作用する向きを正とする．また，はりの中立軸を x 軸とし，左端 A を原点とする．はり AB は，集中荷重 W と集中曲げモーメント M_0 を受けており，曲げモーメント線図（BMD）は図２(b)で表される．以下の問いに答えよ．

（１） はり AB に作用する W と M_0 の位置と向きをはりの図とともに図示せよ．

（２） はり AB に作用する曲げモーメントを x の関数として表せ．

（３） 右端 B におけるたわみを求めよ．

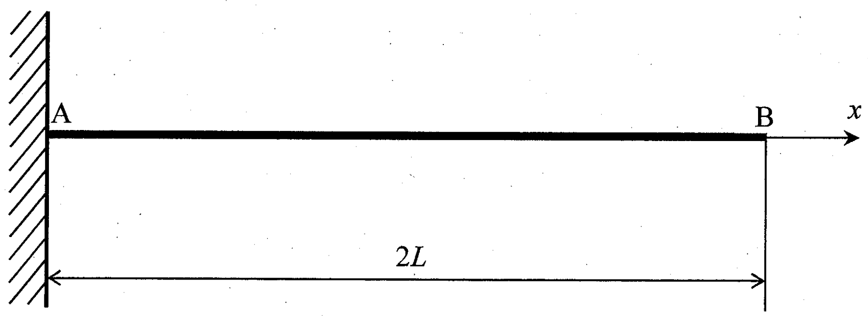

図 2(a)

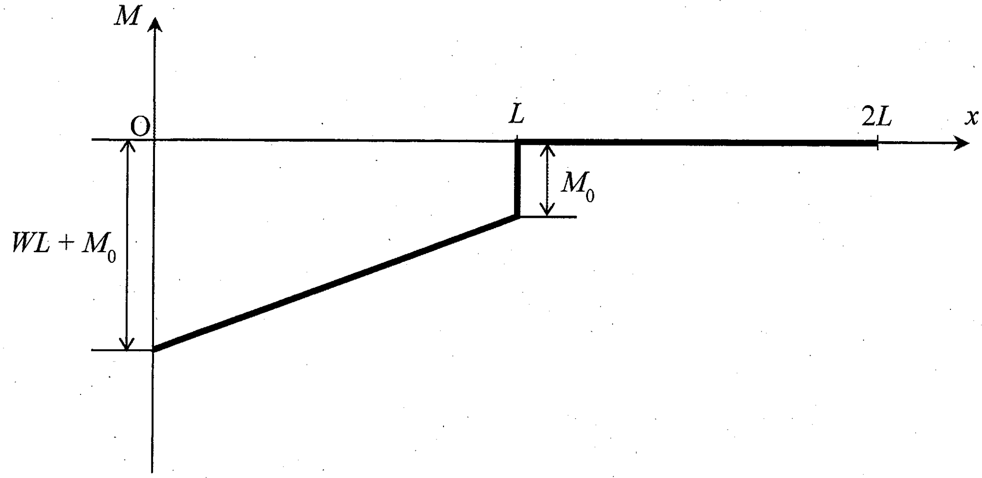

図 2(b)

機械力学 DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図１に示すように，質量m，ばね定数kのばね，減衰係数cのダッシュポットからなる振動系を考える．質量は外力$F(t) = P\sin\omega t$で加振されている．ただし，Pは外力の振幅，ωは角振動数，tは時間である．$c < \sqrt{2mk}$とし，系が定常状態にあるとき，以下の問いに答えよ．

（１）系の運動方程式を導け．

（２）質量mの変位xは以下のように与えられる．

$$x = A\sin(\omega t - \phi)$$

ただし，

$$A = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \text{および} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

である．振幅Aが最大となるωを求めよ．

（３）$A_{\mathrm{max}}/A_{\mathrm{s}}$を求めよ．ただし，$A_{\mathrm{max}}$は問（２）で求めた$\omega$で与えられる$A$の最大値，$A_{\mathrm{s}}$は静的外力$P$を加えたときの質量$m$の変位である．

（４）$c \ll \sqrt{mk}$のとき$A_{\mathrm{max}}/A_{\mathrm{s}}$が$\sqrt{mk}/c$となることを示せ．

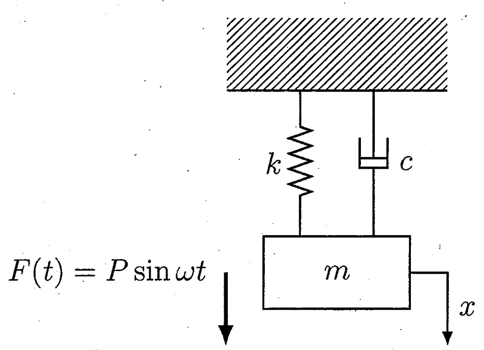

図１

機 械 力 学 DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

2．図2に示すような，長さlの糸と質量Mからなる振り子，質量mの台車，およびばね定数k_1，k_2の2つのばねからなる振動系を考える．台車は壁にばねを介してつながれ，摩擦なく水平方向のみに移動できる．振り子は糸で台車の重心に固定されており，図の面内でのみ回転できる．xは台車の釣り合い位置からの水平変位，θは振り子の鉛直方向からの振れ角である．gは重力加速度である．糸とばねの質量は無視できるとし，以下の問いに答えよ．

（1）系の運動エネルギーTを求めよ．

（2）系のポテンシャルエネルギーUを求めよ．

（3）ラグランジュ方程式を用いて，系の運動方程式を求めよ．

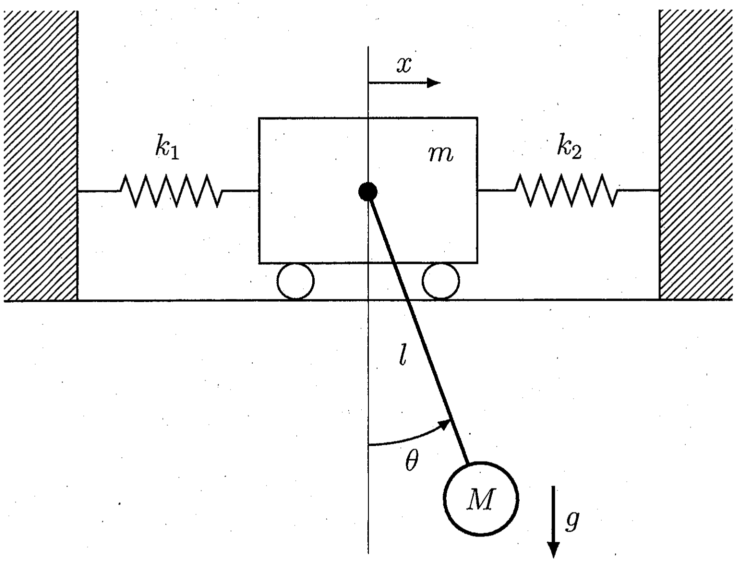

図2

制御工学　CONTROL ENGINEERING

1．　以下の問いに答えよ．

（1）図1に示すゲイン特性を有する線形時不変システム $P(s)$ を考える．このゲイン特性は折れ線近似であり，角周波数 $\omega = 1$ rad/s において近似的に 0 dB である．

a) このシステムの伝達関数 $P(s)$ を求めよ．

b) $P(s)$ のインパルス応答を求めよ．

c) $P(s)$ に $u(t) = \sin t$ を入力したときの定常出力 $y(t)$ を求めよ．

（2）図2に示すフィードバック制御系を考える．プラントとコントローラの伝達関数 $P(s)$, $C(s)$ は，それぞれ次式で与えられるものとする．

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad C(s) = K\frac{Ts+1}{0.1s+1}, \quad K > 0, \quad T > 0$$

ゲイン K をどれだけ大きくしても，制御系が安定であるための T の範囲を求めよ．

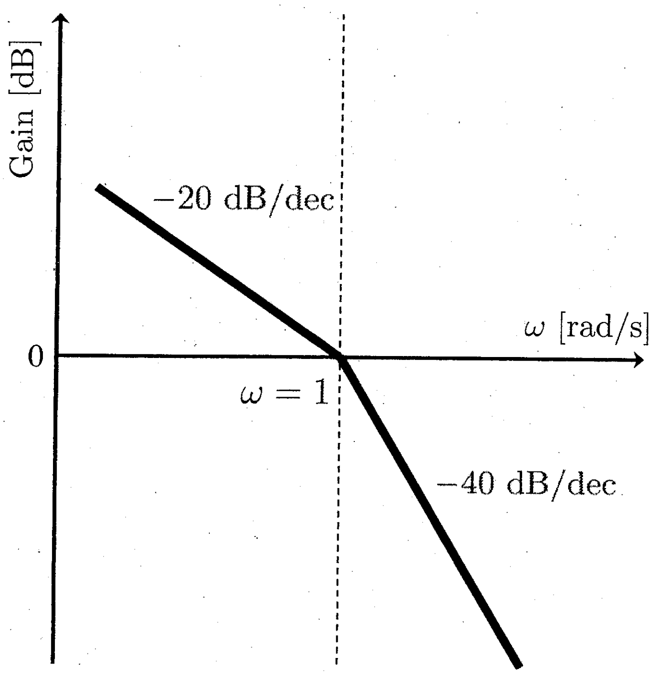

図1

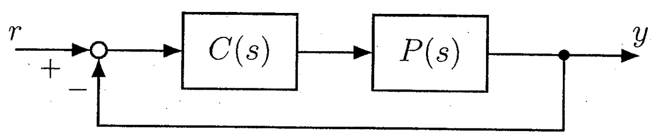

図2

制 御 工 学　CONTROL ENGINEERING

2．次式で表されるシステムを考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$u(t)$ は入力，$y(t)$ は出力，$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T$ は状態ベクトルである．また，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = [1 \;\; 2]$$

である．このとき，以下の問いに答えよ．

（1）このシステムが可制御であるか否かを調べよ．

（2）出力フィードバック $u(t) = -ky(t)$ を適用するとき，閉ループシステムが安定となる k の範囲を求めよ．

（3）問（2）において $k = 2$ とする．次式のリアプノフ関数候補を用いて閉ループシステムの安定性を議論せよ．

$$V(t) = \boldsymbol{x}(t)^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 31 & 9 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$