和

令和４年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ａ　MATHEMATICS A

令和 4 年 8 月 30 日(火)　9:30 － 10:30

注　意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．配付された試験問題冊子，解答用紙および草案用紙のうち，解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題に解答すること．問題ごとに 2 枚の解答用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

※オンライン受験者は監督者の指示に従って下さい．

数 学 A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ．

（1）次の積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{\cosh x + 1}\, dx$$

（2）次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \log_e(1+x)}{x \sin x}$$

（3）次の積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dxdy$$

ただし領域 D は

$$D = \{\ (x, y)\ |\ x^2 + y^2 \leq 1\ \}$$

により与えられる．

数学A　MATHEMATICS A

2．n 個の点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ が与えられており，そのいくつかが線分で結ばれている場合を考える．これに対応する $n \times n$ 行列の成分 a_{ij} を

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \text{ で } P_i \text{ と } P_j \text{ が結ばれている場合} \\ 0 & i \neq j \text{ で } P_i \text{ と } P_j \text{ が結ばれていない場合} \end{cases}$$

により決める．たとえば，図1，図2の場合，対応する行列 B，C がそれぞれ

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように決まる．以下の問いに答えよ．

（1）B および C の固有値を求めよ．

（2）C^3 の対角成分の和を求めよ．

（3）図3に対応する行列 D について D^3 の対角成分の和を求めよ．

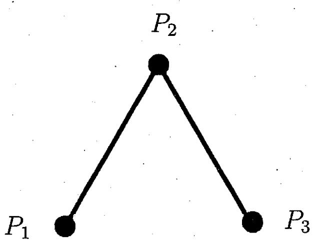


図1

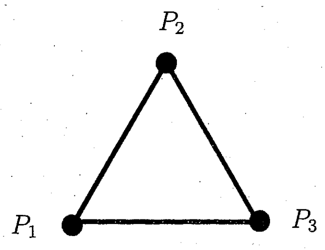


図2

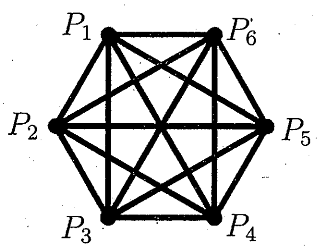


図3

数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = (x + yz)\,\boldsymbol{i} + (x + x^2 + y^2 + zx)\,\boldsymbol{j} + (z + xy)\,\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，x，y，z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．また，領域 V が

$$V:\ 0 \leq z \leq 1 - x^2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

により与えられる．以下の問いに答えよ．

（1）$\nabla\times\boldsymbol{A}$ および $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めよ．

（2）V の表面を S とするとき，次の面積分

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

（3）V の表面の一部 S' が

$$S':\ z = 1 - x^2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z \geq 0$$

により与えられる．次の線積分

$$\int_{\partial S'} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，$\partial S'$ は S' の境界，$\boldsymbol{r}$ は $\partial S'$ の位置ベクトルであり，線積分の向きは $+z$ 方向に進む右ねじの回転方向とする．

和

令和４年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和 4 年 8 月 30 日(火)　13:00 ー 14:00

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．配付された試験問題冊子，解答用紙および草案用紙のうち，解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題に解答すること．問題ごとに２枚の解答用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

※オンライン受験者は監督者の指示に従って下さい．

数学B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（1）$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2(x^4+1)(y^2-1)}{xy}$

（2）$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + (x-3y-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y^2 - 2xy - x + y = 0$

2．以下の問いに答えよ．

（1）周期2πをもつ次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ．

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \le x < \pi)$$

（2）周期2πをもつ次の関数 $g(x)$ をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = \begin{cases} x(x-2\pi) & (0 \le x < \pi) \\ x(x+2\pi) & (-\pi \le x < 0) \end{cases}$$

数学B　MATHEMATICS B

3．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\left[\,f(t)\,\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

任意の連続関数 $\phi(t)$ に対して，デルタ関数 $\delta(t)$ は以下の式を満たす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$$

このとき，$\delta(t)$ のラプラス変換は $\mathcal{L}\left[\,\delta(t)\,\right] = 1$ となる．T を正の定数とするとき，以下の問いに答えよ．

（１）次の関数 $x(t)$ のラプラス変換を求めよ．

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < T) \\ -1 & (T \le t < 2T) \\ 0 & (t < 0,\ t \ge 2T) \end{cases}$$

（２）関数 $g(t)$ が以下のように与えられる．

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\,(t - nT)$$

$\mathcal{L}\left[\,g(t)\,\right] = \dfrac{1}{1 - e^{-sT}}$ を示せ．

（３）次の関数 $y(t)$ を求めよ．

$$y(t) = \int_0^t x(u)g(t-u)du$$

ただし，$x(t)$ と $g(t)$ はそれぞれ問（１）および問（２）で与えられている．

和

令和４年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

令和４年８月30日(火) 15:45 － 16:45

注意

1. 本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．
2. 試験問題冊子，解答用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，解答用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．
3. ５科目の中から２科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．１科目に２枚綴１組を使用すること．各科目とも１問につき１枚の解答用紙を使用すること．
4. 試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

※オンライン受験者は監督者の指示に従って下さい．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．1 kg の理想気体が状態 1 から状態 2 に準静的に変化する過程を考える．この理想気体の状態 1 および状態 2 における温度，圧力，比体積はそれぞれ T_1 および T_2，p_1 および p_2，v_1 および v_2 であり，定圧比熱，定積比熱，比熱比，気体定数がそれぞれ c_p，c_v，κ，R であるとする．以下の問いに答えよ．

（1） この過程が等圧過程であるとき，絶対仕事，外部からの加熱量および比エンタルピー変化を c_p，c_v，T_1，T_2 の中から必要なものを用いて表せ．

（2） この過程が等積過程であるとき，工業仕事が正となる場合の条件式を導け．

（3） ポリトロープ指数を n とするとき，ポリトロープ過程の絶対仕事 l_a は次式で表される．

$$l_a = \frac{R}{n-1}(T_1 - T_2)$$

l_a が断熱膨張過程の工業仕事 l_{12} と等しくなるポリトロープ指数 n を導け．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

2．図 1 左側は，ある物質の三重点温度 T_T から臨界点温度 T_C に至る温度域における飽和液線および乾き飽和蒸気線を圧力－比体積（$p-v$）線図に表したものであり，右側は未記入の圧力－温度（$p-T$）線図である．また，温度 T における飽和液および乾き飽和蒸気の比体積の差を Δv，比エントロピーの差を Δs とする．以下の問いに答えよ．

（1） 図 1 の 2 つの線図を解答用紙に書き写し，以下の問いに答えよ．

a） T_C および T_T における等温線を解答用紙の $p-v$ 線図上に示せ．

b） 圧縮液および過熱蒸気の領域を解答用紙の $p-v$ 線図上に示せ．

c）上記 2 本の等温線および飽和液線，乾き飽和蒸気線を解答用紙の $p-T$ 線図上に示せ．

（2） 問（1）で $p-T$ 線図に示した飽和液線および乾き飽和蒸気線の温度 T におけるそれぞれの勾配を，Δv，Δs，T の中から必要なものを用いて表せ．

（3） 温度 300 K および 500 K の水について，飽和液および乾き飽和蒸気の比体積の差 Δv はそれぞれ 39 m^3/kg および 0.075 m^3/kg，蒸発潜熱 L はそれぞれ 2.4×10^3 kJ/kg および 1.8×10^3 kJ/kg である．このとき，問（2）で解答した勾配をそれぞれの温度において求めよ．

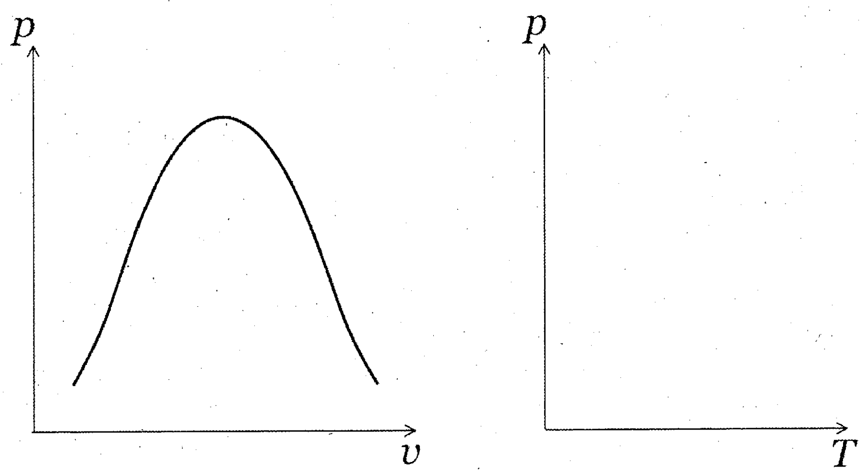


図 1

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

1．図１に示すように，密度ρ，粘度μの静止した非圧縮粘性流体中を密度ρ_s，半径aの球が沈降する場合を考える．球の抗力係数をC_D，球の重力方向の終端速度をV，重力加速度をgとする．密度ρ，ρ_sは一定である．以下の問いに答えよ．

（１）球周り流れのレイノルズ数Reをμ，ρ，a，Vのすべてを用いて表せ．ただし，代表寸法を球の直径とする．

（２）球の抗力係数を$C_D = 24/Re$とするとき，球に作用する抗力Dをμ，a，Vのすべてを用いて表せ．

（３）問（２）のとき，球の終端速度Vをρ，ρ_s，a，μ，gのすべてを用いて表せ．

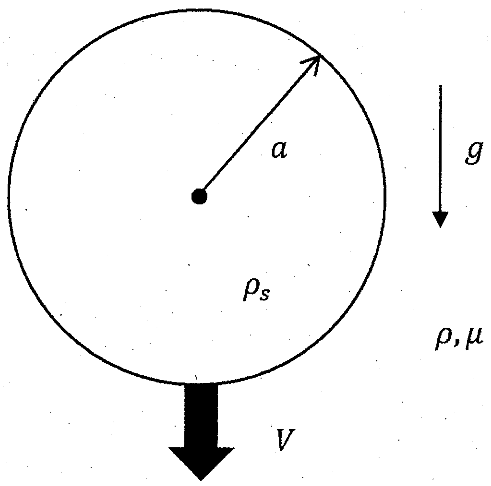


図１

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

2．図２に示すような，非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える．r および θ はそれぞれ半径方向および周方向の極座標であり，x および y はデカルト座標である．この流れの速度ポテンシャル $\phi(r,\theta)$ は以下の式で与えられ，x 軸に対して角度 $\beta\,(0<\beta<\pi/2)$ だけ傾いた速度 U の一様流中に置かれた半径 a の円柱まわりの流れを表す．

$$\phi(r,\theta)=U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos(\theta-\beta)+\frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

ここで，U，a は正の実数，循環 Γ は実数である．流体の密度 ρ を一定とする．図２の点Ａおよび点Ｂはよどみ点を表す．以下の問いに答えよ．

（１）半径方向速度 v_r および周方向速度 v_θ を $U, a, \beta, \Gamma, r, \theta$ から必要なものを用いて表せ．

（２）よどみ点Ｂの座標が $(r,\theta)=(a,0)$ となるとき，Γ を U, a, β を用いて表せ．

（３）問（２）のとき，円柱にかかる x 方向と y 方向の力を ρ, U, a, β を用いて表せ．ここで主流中に循環 Γ が存在するときに物体に対して主流に垂直な方向に大きさ $|\rho U\Gamma|$ の力が発生すること，およびダランベールのパラドックスを利用してよい．

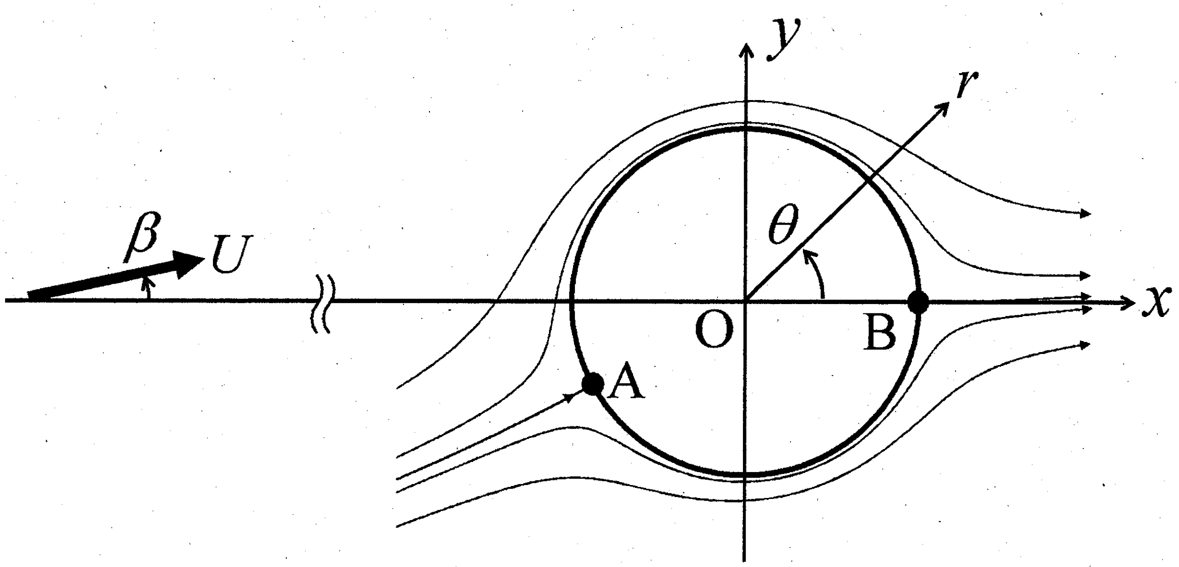


図２

材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

1．図 1 (a)に示すように，中実丸軸 AB，BC，CD からなる直径 d の複合丸軸が両端 A，D で剛体壁に固定されている．丸軸 AB，CD の長さを L，線膨張係数を α_1，縦弾性係数を E_1，横弾性係数を G_1 とする．丸軸 BC の長さを $2L$，線膨張係数を α_2，縦弾性係数を E_2，横弾性係数を G_2 とする．ただし，$\alpha_1 > \alpha_2 > 0$，$E_1 > E_2 > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

（1） 複合丸軸の温度を ΔT だけ上昇させる．複合丸軸に生じる熱応力を求めよ．

（2） 問（1）において，丸軸 BC の変形量を求め，伸びるか縮むかも述べよ．

（3） 複合丸軸に対して，図 1 (b)のように位置 B，C にねじりモーメント $2M$ と M をそれぞれ作用させる．このとき丸軸の両端 A，D に生じる反ねじりモーメント M_A，M_D をそれぞれ求めよ．

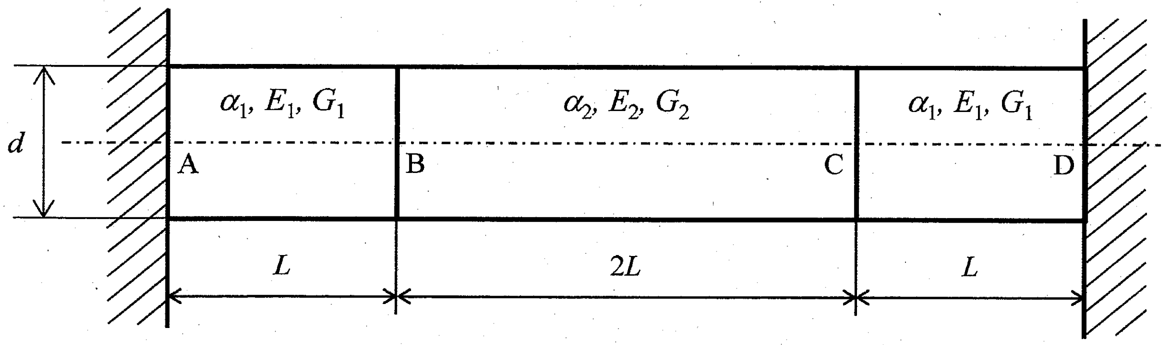


図 1(a)

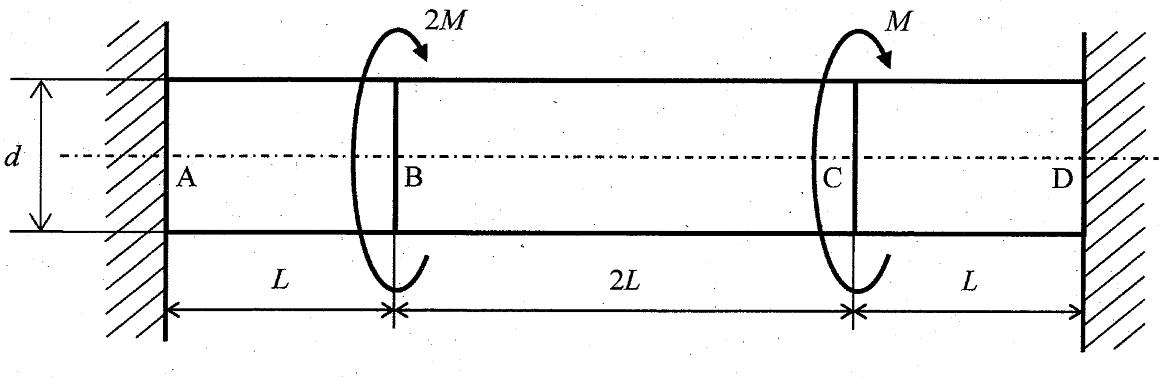


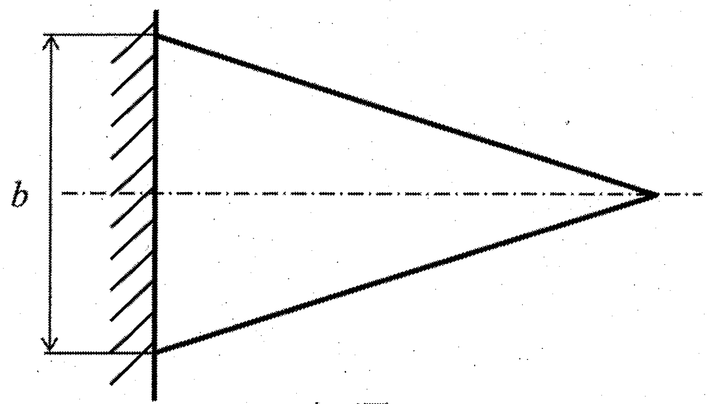
図 1(b)

2．図２に示すように，長さが L で三角形形状の片持はり AB が A 端で鉛直剛体壁に固定されている．はりの高さは h で一定であり，A 端でのはりの幅は b である．はりの縦弾性係数は E である．B 端に鉛直下方に集中荷重 P を作用させる．はりの自重は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

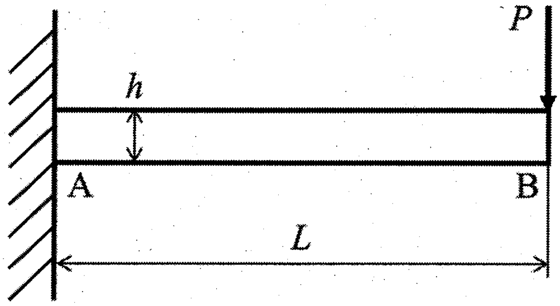
（1）B 端におけるはりのたわみを求めよ．

（2）はり AB に生じる最大引張曲げ応力の大きさと位置を求めよ．

（3）はり AB に蓄えられるひずみエネルギーを求めよ．



上面図



側面図

図２

機 械 力 学　DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図 1 に示すような，慣性モーメント J の剛体円板とねじりこわさ k_1，k_2 の軸からなるねじり振動系を考える．軸の質量は無視でき，円板は回転方向にのみ運動するものとする．円板は回転方向にモーメント$M(t) = A\cos\omega t$で加振されている．Aはモーメントの振幅，ωは角振動数，tは時間である．円板の釣り合い位置からの回転角をθとする．系の応答は定常状態にあるものとして，以下の問いに答えよ．

（1） 系の運動方程式を求めよ．

（2） 円板の回転角の振幅を求めよ．

（3） 系が共振状態となるときのωを求めよ．

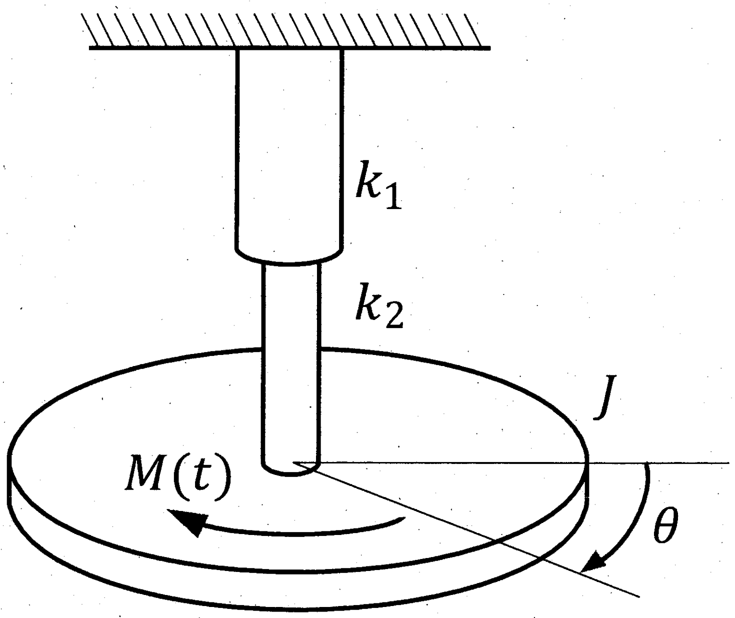


図 1

2．図2に示すような，質量m，長さ$a+b$，重心O，重心周りの慣性モーメントJの剛体とばね定数がk_1，k_2の 2 つのばねからなる振動系を考える．それぞれのばねは剛体の両端に接続されている．剛体は図の面内で十分に小さい変位で並進運動および回転運動を行い，重心Oは垂直方向にのみ振動する．図2–1は系の釣り合いの状態を示す．重心Oの釣り合いの位置からの並進変位および回転変位をそれぞれ図2–2に示すxおよび θ とする．ばねの質量は無視できるものとし，以下の問いに答えよ．

（1） 並進運動の運動方程式を求めよ．

（2） 回転運動の運動方程式を求めよ．

（3） 並進運動と回転運動が連成しない条件を求めよ．

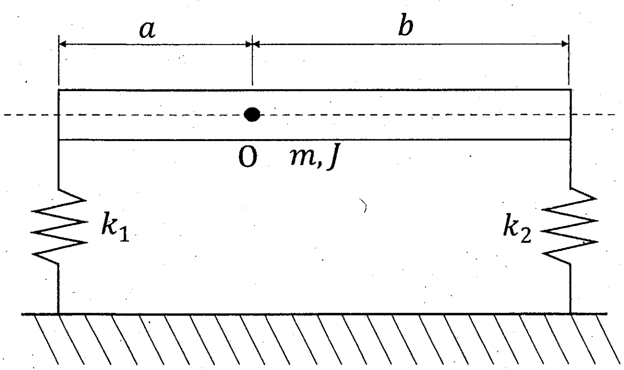


図 2-1

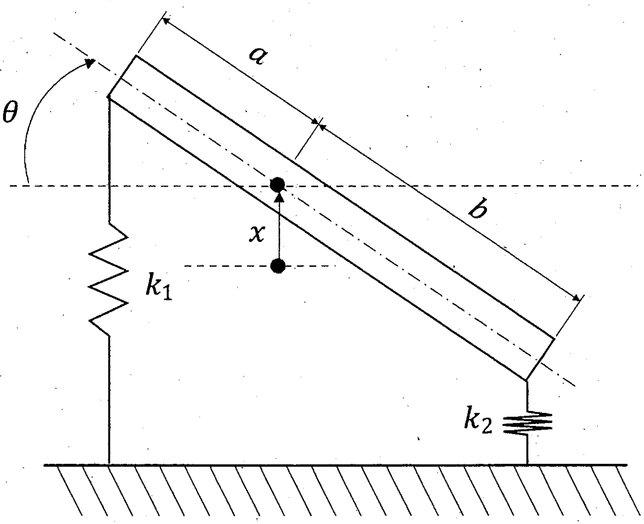


図 2-2

制御工学 CONTROL ENGINEERING

1．以下の問いに答えよ．

（1）図1に示すフィードバック制御系を考える．出力 $Y(s)$ を以下のように表すとき，$G_1(s)$ および $G_2(s)$ を求めよ．

$$Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)D(s)$$

（2）閉ループ伝達関数 $G(s)$ および開ループ伝達関数 $L(s)$ が以下のように表されるフィードバック制御系を考える．

$$G(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}, \qquad L(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$k=1$ のときのゲイン余裕を求めよ．

（3）問（2）のフィードバック制御系において $k=6$ とする．このシステムの単位ステップ応答の説明として適切なものを1つ選び，根拠を説明せよ．

(a) 応答はオーバーシュートを生じたのちに，一定値に収束する．

(b) 応答は単調に増加し，一定値に収束する．

(c) 応答は周期的に振動する．

(d) 応答は発散し，無限大となる．

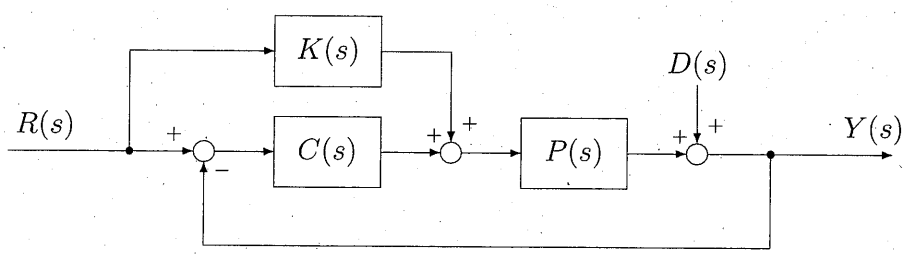


図1

制御工学 CONTROL ENGINEERING

2． 非線形システム

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x^2 - x = u$$

を考える．

（1）平衡点とはシステムが時間的に変化しないで静止する点のことである．入力 $u = 0$ でのシステムの平衡点 x_e をすべて求めよ．

（2）問（1）で求めた平衡点 x_e のうち値が最も大きいものを c とする．点 c のまわりでシステムを線形化し，状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

を求めよ．ただし，状態ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x - c \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

とする．

（3）問（2）で求めたシステムに対し，状態フィードバック

$$u = -\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}; \qquad \boldsymbol{k} = [11 \quad 6]$$

を適用する．このとき閉ループ系の極は -2 と p である．α と p の値を求めよ．