和

令和５年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ａ　MATHEMATICS A

令和 5 年 8 月 29 日(火)　9:30 － 10:30

注　意

1. 本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．
2. 配付された試験問題冊子，解答用紙および草案用紙のうち，解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．
3. 全ての問題に解答すること．問題ごとに２枚の解答用紙を用いること．
4. 試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数 学 A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ.

（1）次の関数 $f(x)$ の $x=1$ の近傍における２次までのテイラー展開を求めよ.

$$f(x) = x^x$$

（2）次の２変数関数 $g(x,y)$ の $(x,y)=(1,1)$ の近傍における２次までのテイラー展開を求めよ.

$$g(x,y) = (x+y)^2$$

（3）a を正の定数とするとき，次の積分を求めよ.

$$\int_D y^2\,dxdy, \quad D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \le a^2\,\right\}$$

2．デカルト座標系 (x, y, z) において関数 $f(x, y, z)$ が

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

により与えられる．$f(x, y, z)$ は 3×3 対称行列 A を用いて

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表すことができる．以下の問いに答えよ．

（1）A を求めよ．

（2）A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

（3）A の最小固有値に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$\boldsymbol{n}$ に垂直で原点を通らない平面と，曲面 $f(x, y, z) = 0$ の交線は楕円になる．この楕円の短軸と長軸の比を求めよ．

数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系(x,y,z)において，ベクトル場$\boldsymbol{A}$が

$$\boldsymbol{A}=z\,\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j}+y\,\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，x, y, z方向の基本ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$とする．また，曲面Sが

$$S: z=x^2-y^2 \qquad (x^2+y^2 \leq a^2)$$

により与えられる（aは正の定数）．以下の問いに答えよ．

（1）$\nabla\times\boldsymbol{A}$および$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$を求めよ．

（2）Sの面積を求めよ．

（3）次の面積分

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$はSの単位法線ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$のz成分は正とする．

和

令和５年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和５年８月29日(火)　13:00 － 14:00

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと.

2．配付された試験問題冊子，解答用紙および草案用紙のうち，解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること.

3．全ての問題に解答すること．問題ごとに２枚の解答用紙を用いること.

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと.

数 学 B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（1）$\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{1}{2}$

（2）$\dfrac{dy}{dx} = e^x \sin x + 2y$

数学B　MATHEMATICS B

2．関数 $u(x,y)$ は偏微分方程式

$$3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} = u+x$$

を満足する．$\xi = x-3y$，$\eta = y$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

（1）関数 $u(\xi,\eta)$ が満足する偏微分方程式を求めよ．

（2）$z(\xi,\eta) = e^{-\eta}u$ とおくとき，問（1）の結果を用いて，関数 $z(\xi,\eta)$ の一般解を求めよ．

（3）$u(0,y) = e^{-2y}-3$ を満足する $u(x,y)$ を求めよ．

数学B　MATHEMATICS B

3．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\,[\,f(t)\,] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

関数 $x(t)$，$y(t)$ が次の連立方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = -4x(t) + y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -x(t) - 4y(t)$$

および初期条件

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

を満足するとき，以下の問いに答えよ．

（１）$x(t)$，$y(t)$ のラプラス変換 $X(s)$，$Y(s)$ を求めよ．

（２）問（１）の結果を用いて，$x(t)$，$y(t)$ を求めよ．

和

令和５年度 秋季募集
東北大学大学院機械系４専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

令和５年８月30日(水)　9:30 － 11:30

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，答案用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．

3．５科目の中から２科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．１科目に２枚綴１組を使用すること．各科目とも１問につき１枚の答案用紙を使用すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．以下の問いに答えよ．ただし，熱源とは熱容量が無限大の閉じた系であり，熱源の温度は常に一定に保たれたままサイクルと熱の授受を行う．また，T_0，T_1，T_2，T_3 は絶対温度であり，$T_0 > T_1 > T_2 > T_3$ とする．

（1）図 1 に示すサイクル A とサイクル B で構成される複合エンジンを考える．サイクル A は温度 T_1 の熱源と温度 T_2 の熱源の間で動作し，サイクル B は温度 T_2 の熱源と温度 T_3 の熱源の間で動作する．サイクル A は温度 T_1 の熱源から熱量 Q_A を受け取り，サイクル B はサイクル A が排出した熱量 Q_B を受け取る．サイクル A と B はそれぞれの熱源温度で決まるカルノー効率の 1/2 の熱効率をもつとする．

a）サイクル A およびサイクル B の出力仕事 L_A と L_B を Q_A，Q_B，T_1，T_2，T_3 から必要な記号を用いてそれぞれ表せ．

b）複合エンジンの熱効率を最大化する温度 T_2 を T_1 と T_3 を用いて表せ．

c）複合エンジンのエントロピー生成を最小化する温度 T_2 を T_1 と T_3 を用いて表せ．

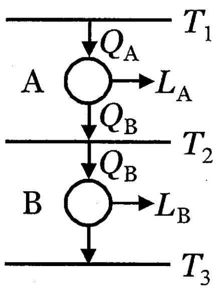

図 1

（2）ある一定質量の物質を逆カルノーサイクルで冷却する．物質の初期状態は温度 T_1 の液体であり，最終状態は温度 T_3 の固体である．この物質の冷却過程は次の 3 つの過程で構成される．

過程 1：温度 T_1 から T_2 まで液体を冷却する過程

過程 2：温度 T_2 で液体から固体に相変化させる過程

過程 3：温度 T_2 から T_3 まで固体を冷却する過程

この逆カルノーサイクルの高温熱源温度は T_0 で一定とし，低温熱源温度は被冷却物質の温度に等しいとする．被冷却物質の液体および固体の熱容量はそれぞれ C_L，C_S で一定であり，この質量での凝固熱は H である．各冷却過程における物質の体積変化は無視できるものとする．

a）各冷却過程における被冷却物質のエントロピー減少量を求めよ．

b）全冷却過程を通じて逆カルノーサイクルに入力される仕事を求めよ．

熱 力 学　THERMODYNAMICS

２．1 kg の理想気体を作動流体とするサイクルを考える．このサイクルは 3 つの準静的過程からなる．作動流体が状態 1（温度 300 K, 圧力 p_1 = 0.1 MPa）から等積加熱されて状態 2（圧力 p_2 = 0.4 MPa）となり，さらに等温膨張して状態 3 となり，等圧冷却されて状態 1 に戻る．作動流体の比熱比は $\kappa = 1.4$, 気体定数は $R = 0.3$ kJ/(kg·K)とする．以下の問いに答えよ．

（１）このサイクルの圧力－比体積（$p - v$）線図を描き，状態 1，2，3 を線図に示せ．

（２）状態 2 の温度を求めよ．

（３）系が外部に対して行う 1 サイクルあたりの仕事を求めよ．ただし, $\ln 2 = 0.693$ とする．

（４）このサイクルの理論熱効率を求めよ．

（５）状態 2 から断熱膨張により状態 4（圧力 p_1）となる過程を考える．状態 1→2→4→1 の過程で構成されるサイクルの理論熱効率を求めよ．ただし, $0.5^{4/7} = 0.673$ とする．

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

1．図１に示すような，非粘性・非圧縮性流体の二次元ポテンシャル流れを考える．ここで，z を $z=x+iy$ により表される複素変数とする．xy 平面の原点に循環の強さ Γ の渦が存在し，強さ m の湧き出しが点 $z=ih$ に存在するとき，この流れは以下の複素ポテンシャル$W(z)$により表される．

$$W(z)=\frac{i\Gamma}{2\pi}\log z+m\log(z-ih)$$

ここで，h は実数，i は虚数単位，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

（１）$z=x+iy=re^{i\theta}$および $z-ih=x+i(y-h)=r_1e^{i\theta_1}$とおくとき，この流れ場の速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ を π，m，Γ，r，r_1，θ，θ_1 の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ．ただし，r，r_1 およびθ，θ_1 は，それぞれ極座標系における半径方向座標および周方向座標を表す．

（２）点 P（$z=h+ih$）における速度および圧力について考える．ただし，h は 0 でないとする．

a）点 P における x 方向速度 u_x および y 方向速度 u_y を π，m，Γ，h の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ．

b）流体の密度を ρ，原点から十分に離れた無限遠方での圧力を p_0 とするとき，ベルヌーイの式から，点 P での圧力を p_0，π，ρ，m，Γ，h のすべてを用いて表せ．

（３）$h=0$ のときの xy 平面における流線と流れの方向を図示せよ．

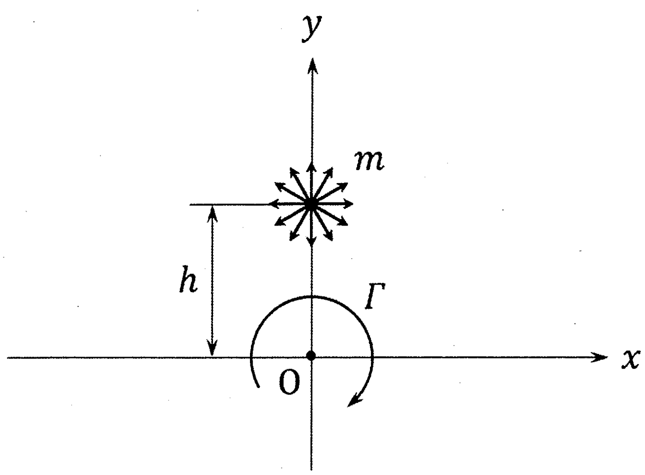

図１

流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

２．図２に示すような距離 h の平行平板間における非圧縮ニュートン流体の二次元定常流れについて考える．流体は，断面Ａから速度 Vの一様流れとして流入し，助走距離 L における断面Ｂでは，放物形の十分発達した速度分布となる．そのとき，断面Ａでは圧力 p_1，断面Ｂでは圧力 p_2 である．断面Ｂでの速度分布は

$$u(y) = ay^2 + by + c$$

として表されるものとする．ここで， a, b, c は係数である．ただし，流体の密度 ρ および粘性係数 μ は一定であり，重力は無視する．以下の問いに答えよ．

（１）断面 B での速度分布 $u(y)$ における係数 a, b, c を h および u_{max} の中から必要な記号を用いて表せ．ただし，速度 u は，$y = h/2$ で最大速度 $u = u_{max}$ である．

（２）断面Ｂにおける壁面せん断応力 τ_w を μ, h および u_{max} を用いて表せ．

（３）速度 u_{max} を速度 V を用いて表せ．

（４）流体が区間 AB の上下の平行平板に与える x 方向の力の和 F を h, ρ, V, p_1 および p_2 を用いて表せ．ただし力の和Fは，z方向単位長さ当たりに働く力とする。

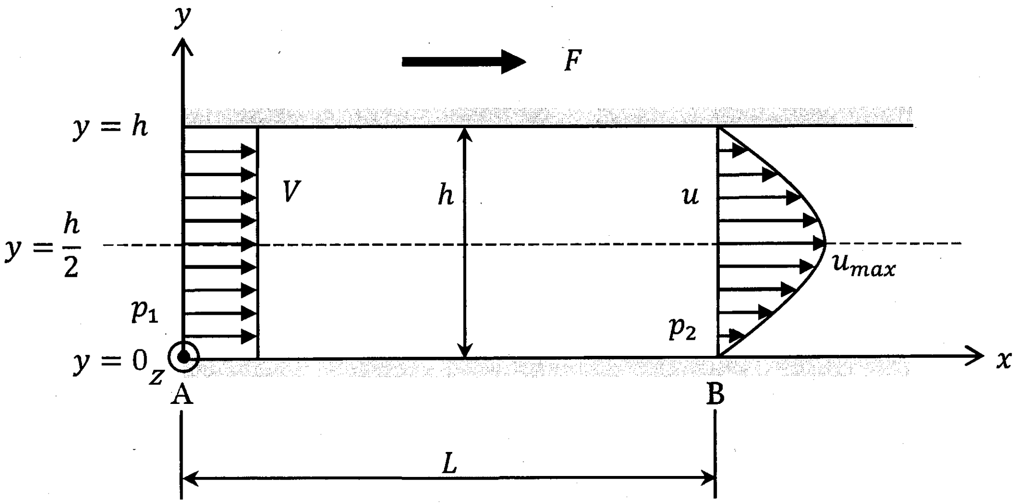

図２

材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

1．図 1 に示すように，外径 $3d$ および内径 $2d$ の中空丸軸 AB と直径 d の中実丸軸 CD を考える．丸軸 AB の左端 A と丸軸 CD の右端 D はそれぞれ剛体壁に固定されている．丸軸 AB と丸軸 CD には，それぞれ固定端から距離 L の位置 E にピン結合用の穴がある．初期状態では，丸軸 CD の穴は，丸軸 AB の穴を通した直線と β の角度をなしている．丸軸 AB および丸軸 CD のせん断弾性係数は G とする．以下の問いに答えよ．

（1） 丸軸 CD をねじり，両軸の穴の位置を一致させるために必要なねじりモーメント M_E を求めよ．

（2） 次に，丸軸 AB の穴と丸軸 CD の穴にピン結合して固定する．その後，M_E を解放したときの丸軸 AB のピン結合位置のねじれ角 α を求めよ．ただし，ピンと穴の変形や摩擦は無視するものとする．

（3） このとき，丸軸 AB と丸軸 CD に生じる最大せん断応力 τ_1 と τ_2 をそれぞれ求めよ．

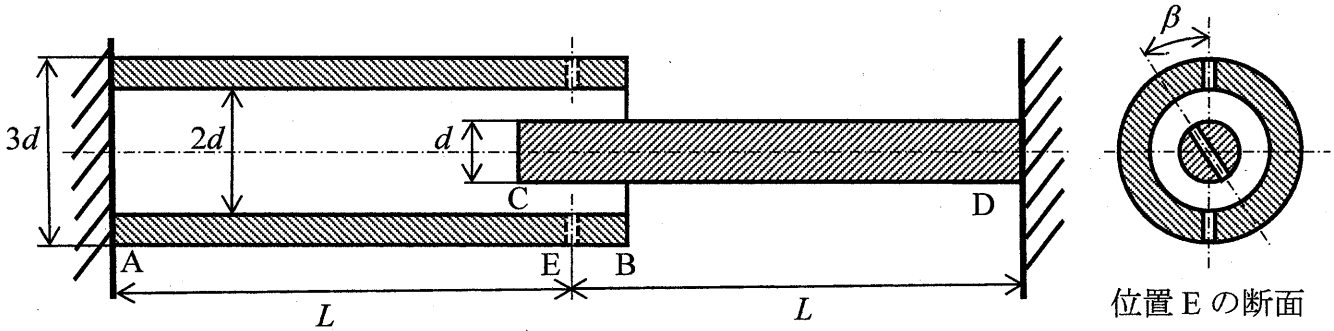

図 1

材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

２．図２に示すように, 一様な断面を有する直線部と 1/4 円弧部を持つ曲がりはり ABC を考える．はりの円弧部 BC の曲率半径は r, 直線部 AB の長さは $3r$ である．直線部 AB は点 A で剛体壁に垂直に固定されている．曲がりはり ABC の曲げ剛性は一様で EI とする．端部 C に鉛直下方向に集中荷重 P を作用させる．はりの自重は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

（1） 固定端 A における反力と反モーメントの大きさと向きを示せ．

（2） 点 B における鉛直方向のたわみとたわみ角を求めよ．

（3） 点 B から角度 θ 離れた点 D に作用する曲げモーメントを θ の関数として求めよ．
また，この曲げモーメントにより円弧部 BC に蓄えられる歪みエネルギーを求めよ．

（4） カスチリアーノの定理を用い，円弧部 BC 部に発生する鉛直方向のたわみを算出し，端部 C における鉛直方向のたわみを決定せよ．

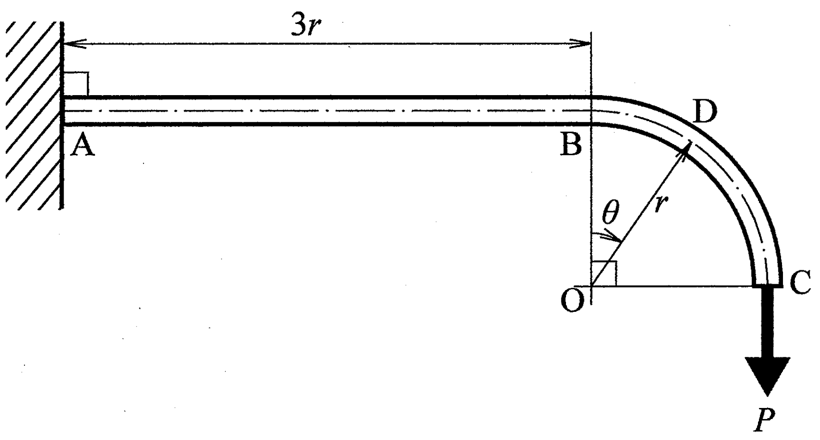

図 2

機 械 力 学　DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図１に示すような，ばね定数 k_1, k_2 の２つのばね，粘性減衰係数 c のダッシュポット，空間に固定されている半径 r_1, r_2, 慣性モーメント J_P の２段プーリー，および２つの質量 m_1, m_2 からなる振動系を考える．ばねと質量は長さ一定の糸で常に緩みなく連結され，糸とプーリーの間には滑りがないとする．ばね，ダッシュポット，糸の質量は無視できるものとする．質量 m_1 のつり合い位置からの変位を x とし，以下の問いに答えよ．

（１）系の運動エネルギー T を求めよ．

（２）系のポテンシャルエネルギー U を求めよ．

（３）系の運動方程式を求めよ．

（４）系が臨界減衰となる場合の粘性減衰係数 c_{cr} を求めよ．

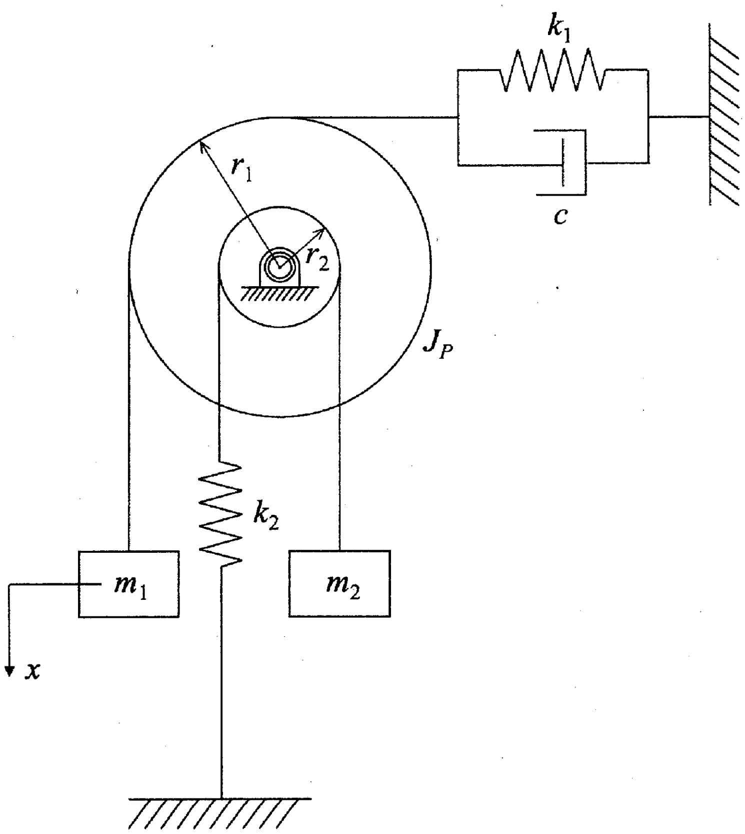

図１

2．図２に示すような，長さが l の剛体棒と質量 m_1，m_2からなる２つの振り子と，ばね定数 k_1，k_2，k_3の３つのばねからなる振動系について考える．重力場中で２つの振り子は水平な天井から吊り下げられており，つり合いの状態では鉛直に位置している．２つの振り子は図の面内で微小振動する．重力加速度を g とし，振り子のつり合いの位置からの角度を θ_1，θ_2とする．剛体棒とばねの質量は無視できるものとして，以下の問いに答えよ．

（１）　系の運動方程式を求めよ．

（２）　$m_1 = m$，$m_2 = 4m$，$k_1 = k_2 = k$，$k_3 = 7k$ のとき，系の固有角振動数を求めよ．

（３）　問（２）で求めた各固有角振動数におけるθ_1とθ_2の振幅比を求め，振動モードを図示せよ．

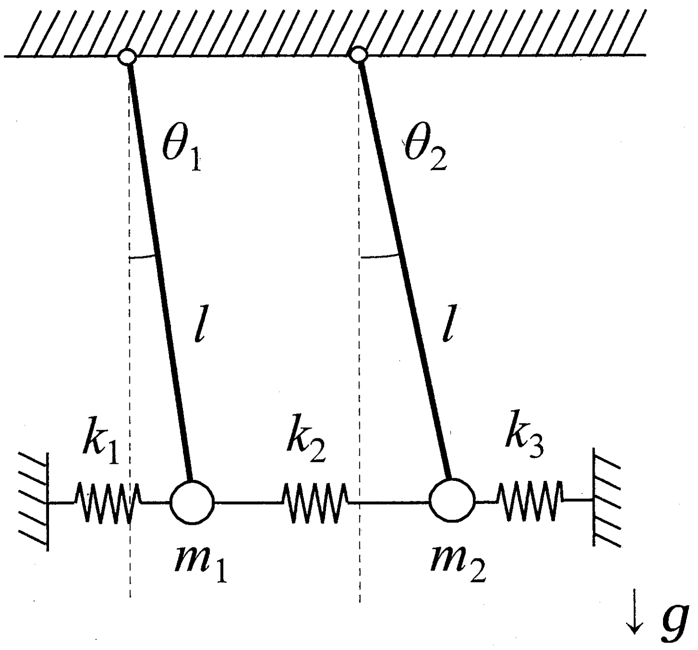

図２

制 御 工 学　CONTROL ENGINEERING

1．図１に示すフィードバック制御系を考える．$P(s)$ は制御対象の伝達関数，$C(s)$，$D(s)$ はコントローラの伝達関数とする．また，$R(s)$，$Y(s)$，$E(s)$ は，目標入力 $r(t)$，制御出力 $y(t)$，偏差 $e(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである．ここで，$P(s)$，$C(s)$，$D(s)$ は以下で表されるものとする．

$$P(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$C(s) = K_1$$

$$D(s) = K_2 s$$

ただし，K_1，K_2 は正の定数である．以下の問いに答えよ．

（1）この制御系の閉ループ伝達関数 $G(s)$ を $P(s)$，$C(s)$，$D(s)$ を用いて表せ．

（2）この制御系の安定性を調べよ．また，$D(s)$ の役割と $D(s)$ がシステムの減衰係数に及ぼす効果を述べよ．

（3）この制御系の定常速度偏差が 0.5 以下になるための K_1，K_2 の条件を求めよ．定常速度偏差とは目標入力に単位定速度入力 $r(t) = t$ を与えたときの定常偏差である．

（4）$K_1 = 2$，$K_2 = 1$ のとき，この制御系のステップ応答を求めよ．

（5）$K_2 = 0.5$ とする．K_1 が 0 から無限大まで変化するとき，この制御系の根軌跡を描け．

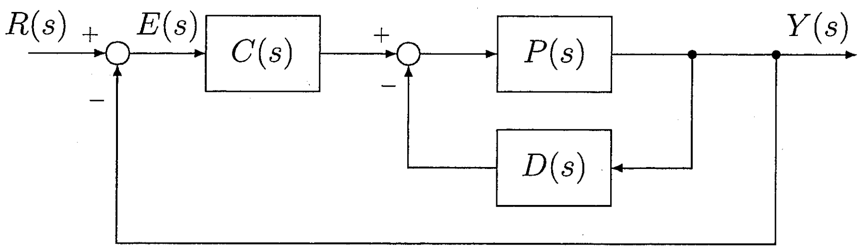

図１

制 御 工 学　CONTROL ENGINEERING

2．以下の運動方程式で記述される動的システムを考える．

$$a\frac{d^2}{dt^2}x(t)+b\frac{d}{dt}x(t)+c\sin x(t)=u(t)$$

ただし，$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ とする．以下の問いに答えよ．

（1）状態変数を

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \end{bmatrix}$$

とするとき，このシステムの状態方程式を求めよ．

（2）$u(t)=0$ のとき，$\boldsymbol{x}(t)=(0,0)^T$ および $\boldsymbol{x}(t)=(\pm\pi,0)^T$ はこのシステムの平衡点であることを示せ．

（3）$\boldsymbol{x}(t)=(\pi,0)^T$ において，問（1）で求めた状態方程式を線形化せよ．

（4）$a=1$, $b=2$, $c=3$ とするとき，問（3）で求めたシステムの安定性を判別せよ．

（5）問（4）のシステムに対し，状態フィードバック制御を考える．閉ループ系の極が $(-3-i,-3+i)$ となる状態フィードバックゲインを求めよ．ただし i は虚数単位である．