和

# 令和６年度実施 秋季募集
# 東北大学大学院機械系４専攻入学試験

## 試験問題冊子

**数学Ａ　MATHEMATICS A**

令和６年８月27日(火)　9:30 － 10:30

注　意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題に解答すること．問題ごとに２枚の解答用紙を用いること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

# 数 学 A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ.

（1）次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2\tan x}$$

（2）次の積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$$

（3）$x^2+2y^2-1=0$ のとき $x-2y$ の極値を求めよ.

# 数学A　MATHEMATICS A

2．行列 $A$ が

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$$

により与えられる．ただし，$a$ は定数である．$n$ を正の整数とするとき，以下の問いに答えよ．

（1）行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（2）$A^n$ を求めよ．

（3）次の $4 \times 4$ 行列のランク（階数）を求めよ．

$$\begin{pmatrix} A^{2n} & A^{2n+1} \\ A^{2n+1} & A^{2n} \end{pmatrix}$$

# 数学A　MATHEMATICS A

3．デカルト座標系 $(x,y,z)$ において，面 $S$ が

$$S: x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2 \leq z^2\tan^2\alpha, \quad z \geq 0$$

により与えられる．ただし，$0<\alpha<\pi/2$ である．また，$\boldsymbol{n}$ は $S$ の単位法線ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ の $z$ 成分は正とする．以下の問いに答えよ．

（1）$\boldsymbol{n}$ を求めよ．

（2）$S$ の面積が $\pi$ となるとき，$\alpha$ を求めよ．

（3）$\alpha=\pi/4$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A}=(x+y)\,z^2\,\boldsymbol{i}+yz^2\,\boldsymbol{j}+xz^2\,\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，$x$，$y$，$z$ 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．このとき，次の面積分

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．

和

# 令和 6 年度実施 秋季募集
# 東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

# 試験問題冊子

## 数学Ｂ　MATHEMATICS B

令和 6 年 8 月 27 日(火)　13:00 － 14:00

注意

1. 本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．
2. 解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．
3. 全ての問題に解答すること．問題ごとに 2 枚の解答用紙を用いること．
4. 試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

# 数学B　MATHEMATICS B

1．次の常微分方程式の一般解を求めよ．

（1）$(x-a)\dfrac{dy}{dx}-(x-a)^3-3y=0$　　（$a$は定数）

（2）$y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2y^2=-x$

# 数学B　MATHEMATICS B

2．関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ および逆変換を次のように定義する．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$f(x) = e^{-ax^2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a$ は $a > 0$ を満たす定数とする．

（1）次の関係式を導け．

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} F(\omega)$$

（2）問（1）の結果を用いて，$F(\omega)$ を求めよ．ただし，$F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を使ってもよい．

（3）関数 $g(x)$ は次の方程式を満たす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, g(x-y)\, dy = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$g(x)$ を求めよ．

# 数学B　MATHEMATICS B

3．関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\,[\,f(t)\,] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$

以下の問いに答えよ．

（1）$\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right] = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$ を用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のラプラス変換を求めよ．

（2）関数 $g(t)$ を $g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-tx^2}\,dx$ とする．$G(s) = \mathcal{L}\,[\,g(t)\,] = \dfrac{\pi}{2s^{\frac{3}{2}}}$ を用いて，次の関係式を導け．

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}}$$

（3）$\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right]$ および 問（2）の $G(s)$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

（4）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

和

# 令和６年度実施 秋季募集
# 東北大学大学院機械系４専攻入学試験

## 試験問題冊子

## 【専門科目】

| | | |
|---|---|---|
| 熱力学 | THERMODYNAMICS | P1~P2 |
| 流体力学 | FLUID DYNAMICS | P3~P4 |
| 材料力学 | STRENGTH OF MATERIALS | P5~P6 |
| 機械力学 | DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS | P7~P8 |
| 制御工学 | CONTROL ENGINEERING | P9~P10 |

令和６年８月 28 日(水)　9:30 － 11:30

注意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，解答用紙，草案用紙および選択票２枚が配付されるので，解答用紙，草案用紙および選択票に受験番号を記入すること．

3．5 科目の中から 2 科目を選択して，選択した科目の問題すべてについて解答すること．選択した科目を選択票に記入すること．１科目に２枚綴１組を使用すること．各科目とも１問につき１枚の解答用紙を使用すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号，問題番号などの記入を再確認すること．解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

# 熱 力 学　THERMODYNAMICS

1．図1のように容器Aと容器Bが管とバルブを介して接続されている．容器Bには水平方向になめらかに動く断熱性のピストンが取り付けられており，二つの容器，接続管およびバルブは周囲を断熱壁で囲まれている．接続管の容積は無視できる．状態1では，容器Aと容器Bの容積が等しくなる位置にピストンが固定されており，容器Aには比熱比 $\kappa$ の理想気体が圧力 $p_1$，温度 $T_1$，比体積 $v_1$ で封入されている．バルブは閉まっており，容器B内は真空である．以下の問いに答えよ．

（1）状態1からバルブを開き十分な時間が経過すると，容器Aと容器Bの気体は温度 $T_2$，圧力 $p_2$ で平衡状態となった．これを状態2とする．温度 $T_2$，圧力 $p_2$ および状態1から状態2への変化における比エントロピーの増加量 $\Delta s_{12}$ を $p_1$，$T_1$，$v_1$，$\kappa$ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（2）状態2からピストンの固定をはずし，この気体を温度 $T_3$ になるまで準静的に断熱膨張させた．これを状態3とする．このときの圧力 $p_3$ と比体積 $v_3$ を $p_1$，$T_1$，$T_3$，$v_1$，$\kappa$ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（3）状態1からバルブを開閉した結果，容器Aに残った気体は可逆断熱的に変化し，気体の圧力は容器Aと容器Bで互いに等しく $p_4$ となったが，温度は容器Aと容器Bで異なりそれぞれ $T_{A4}$，$T_{B4}$ となった．圧力 $p_4$ と温度 $T_{A4}$ を $p_1$，$T_1$，$v_1$，$\kappa$ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ．

（4）状態3の比体積が $v_3 = 4\,v_1$ であるとき，温度 $T_1$，$T_2$，$T_3$，$T_{A4}$，$T_{B4}$ を大きい方から順番に等号，不等号を用いて並べよ．

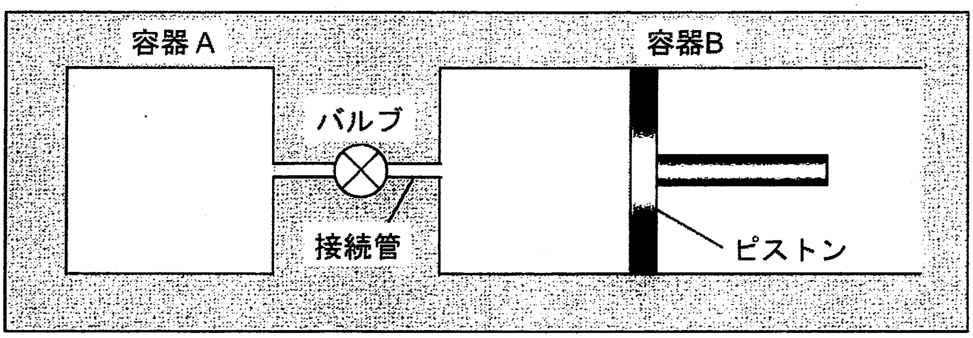


図1

# 熱 力 学　THERMODYNAMICS

2．ある純物質の気液平衡を考える．図 2 および図 3 は，この純物質の圧力－温度（$p-T$）線図，圧力－比体積（$p-v$）線図をそれぞれ示している．この純物質を温度 100 K で一定に保ったまま状態 C から状態 D まで変化させた．表 1 に温度 100 K におけるこの純物質の熱力学的性質を示す．以下の問いに答えよ．

（1）比ギブス自由エネルギー$g$ を温度 $T$, 比エンタルピー$h$, 比エントロピー$s$ を用いて表せ．

（2）図 3 の状態 $C_S$ から状態 $D_S$ に変化する過程で，系の比ギブス自由エネルギーが変化しないことを示せ．

（3）表 1 の比エントロピー$s_G$ の値を求めよ．

（4）図 2 の線 CD 上の点 S における曲線 AB の傾きを温度 $T$, 液相の比体積 $v_L$, 気相の比体積 $v_G$ および単位質量あたりの蒸発熱 $r$ を用いて表せ．

（5）表 1 の値を用いて，系の温度を 101 K にしたときの飽和圧力を有効数字 3 桁で計算せよ．ただし点 S 近傍で曲線 AB は部分的に直線とみなせるものとする．

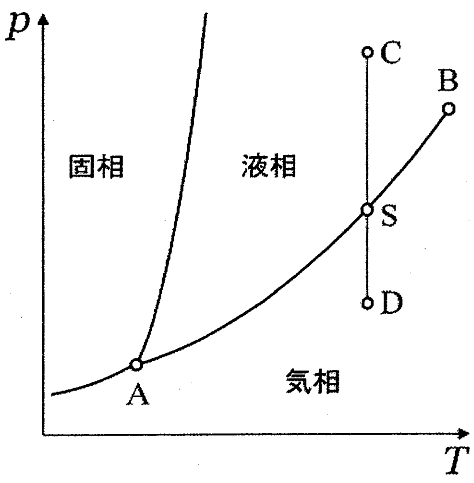


図 2

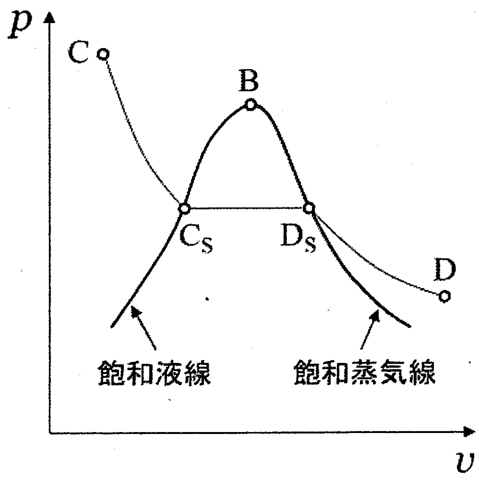


図 3

表 1

| | 飽和液 | 飽和蒸気 |
|---|---|---|
| 圧力 [MPa] | 0.100 | |
| 密度 [kg/m$^3$] | 1000.0 | 5.000 |
| 比エンタルピー [kJ/kg] | –100.0 | 150.0 |
| 比エントロピー [kJ/(kg·K)] | 3.000 | $s_G$ |

# 流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

1．図 1 に示すように，水で満たされた容器が水平な床の上に固定されている．深さ$h_1$の位置に直径$D$の穴が開いており，深さ$h_2$の位置には直径$D$，長さ$L$の円管が水平に接続されている．穴と円管の出口からは，水がそれぞれ一定の速度$U_1$と$U_2$で水平の同じ方向に大気中へ放出されている．水面の高さは一定と仮定し，重力加速度を$g$とする．水の粘度と密度は，それぞれ$\mu$と$\rho$で一定とする．円管の管摩擦損失$\Delta P$を考慮し，それ以外の損失は無視する．$\Delta P$は管摩擦係数$\lambda$を用いて下式で与えられる．

$$\Delta P = \lambda \frac{L}{2D} \rho U_2^2$$

以下の問いに答えよ．

（1）速度$U_1$を，$h_1$，$g$を用いて表せ．

（2）円管内の流れのレイノルズ数$Re$を，$\mu$，$\rho$，$D$，$U_2$を用いて表せ．

（3）円管に働く壁面せん断応力$\tau$を，$\lambda$，$\rho$，$U_2$を用いて表せ．

（4）水の放出により容器が受ける力の大きさ$F$を，$\rho$，$D$，$U_1$，$U_2$を用いて表せ．

（5）速度$U_2$が速度$U_1$と等しいとき，深さの比$h_2/h_1$を$\lambda$，$D$，$L$を用いて表せ．

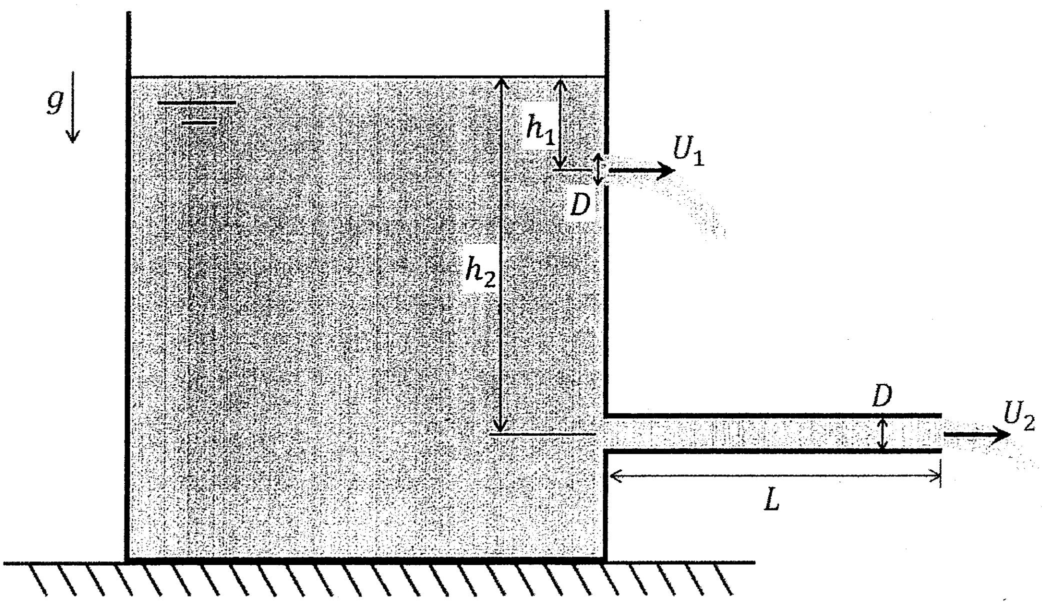


図 1

# 流 体 力 学　FLUID DYNAMICS

2．非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える．この流れは以下の複素ポテンシャル $W(z)$ により表される．

$$W(z) = Cz^3$$

$z$ は複素変数であり，半径 $r$，角度 $\theta$ の極座標により，$z = re^{i\theta}$ の極形式で与えられる．また，$i$ は虚数単位，$C$ は正の実数，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

（1）この流れ場における速度ポテンシャル $\phi$ および流れ関数 $\psi$ をそれぞれ $r$，$\theta$ の関数として表せ．

（2）半径方向速度 $V_r$ と周方向速度 $V_\theta$ をそれぞれ求めよ．

（3）この流れ場の渦度が 0 であることを示せ．

（4）$\theta = 0$ における圧力 $p(r)$ を求めよ．ただし，原点の圧力を $p_0$，流体の密度を $\rho$ とする．

（5）流れ関数が $\psi = 0$ となる $\theta_1$ と $\theta_2$ を求めよ．また，$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ における流線とその方向を図示せよ．

# 材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

1．図 1 に示すように，長さ $3L$ の剛体棒 ABCD が水平になるように，点 B で棒 BE，BF と，点 D で長さ $L$ の棒 DG とピン結合されている．棒 BE，DG は剛体天井に，棒 BF は剛体床にそれぞれピン結合されている．AB 間，BD 間の長さはそれぞれ $L$，$2L$ である．棒 BE，BF，DG の縦弾性係数と断面積はそれぞれ $E$，$S$ である．棒 BE，BF，DG と剛体棒 ABCD のなす角度はそれぞれ 30°，60°，90°である．剛体棒 ABCD は点 A で鉛直下方に集中荷重 $W$ を受け，BD 間の中点 C で鉛直下方に集中荷重 $2W$ を受けている．ただし，剛体棒 ABCD，棒 BE，BF，DG の自重は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

（1） 棒 BE，BF，DG に生じる軸力を求めよ．

（2） 棒 BE，BF，DG の軸方向の変形量を求めよ．

（3） 点 B の鉛直方向の変位を求めよ．

（4） 剛体棒 ABCD の傾き角を求めよ．

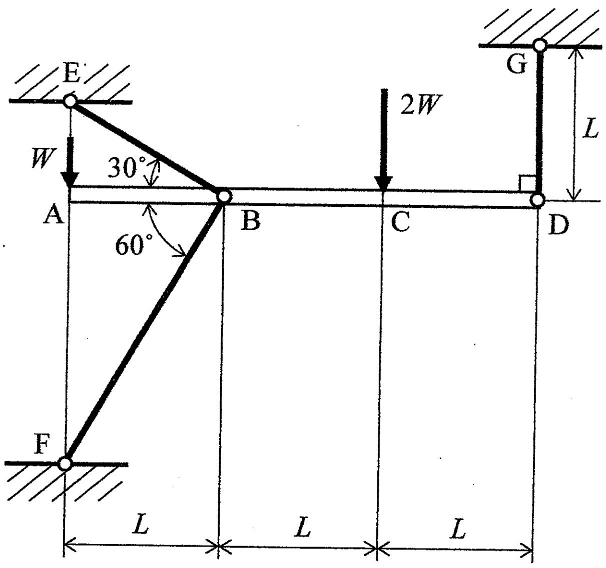


図 1

# 材 料 力 学　STRENGTH OF MATERIALS

２．以下の問いに答えよ．

（１） 図 2(a)に示すように，長さ $2L$ のはり AB が左端 A で剛体壁に固定されている．はり AB の曲げ剛性は $EI$ とする．右端 B に集中モーメント $M_0$ および集中荷重 $W$ を作用させるとき，右端 B におけるたわみ角を求めよ．ただし，はりの自重は無視できるものとする．

（２） 図 2(b)に示すように，長さ $4L$ の段付はり ABCDE が左端 A と右端 E で剛体壁に固定されている．はり AB，BD，DE の長さはそれぞれ $L$，$2L$，$L$ とする．はり AB，BD，DE の曲げ剛性はそれぞれ $2EI$，$EI$，$2EI$ とする．BD 間の中点 C に集中荷重 $W$ を作用させるとき，中点 C におけるたわみを求めよ．ただし，はりの自重は無視できるものとする．

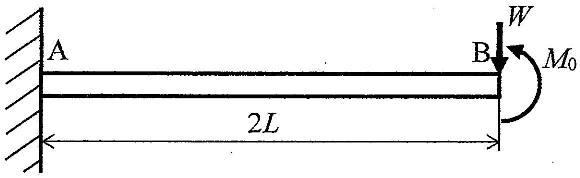


図 2(a)

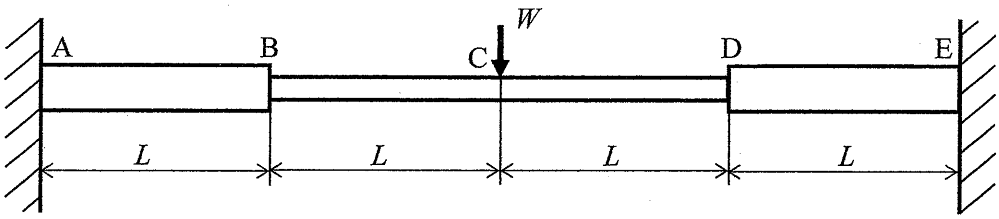


図 2(b)

# 機 械 力 学　DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1．図１に示すような，質量$m$，ばね定数$k$ のばね，および粘性減衰係数$c$ のダッシュポットからなる振動系を考える．質量$m$ は，ばねとダッシュポットによって車輪に支持されており，鉛直方向にのみ振動する．質量$m$ の静的つり合い位置からの鉛直方向の変位を$x$ とする．車輪は路面と常に接しており，振幅$a$ ，波長 $\ell$ の正弦波状の路面を，水平方向に速度$v$ で走行する．また，時刻$t = 0$ で車輪が路面の最も高い位置にあるものとする．車輪は十分に小さく，かつ車輪，ばね，およびダッシュポットの質量は無視できるものとする．振動系が定常状態にあるとき，以下の問いに答えよ．

（１）系の運動方程式を求めよ．

（２）質量$m$ の振幅$A$ と速度$v$ との関係式を求めよ．

（３）振動系の危険速度$v_{cr}$ を求めよ．ただし，$c = 0$ とする．

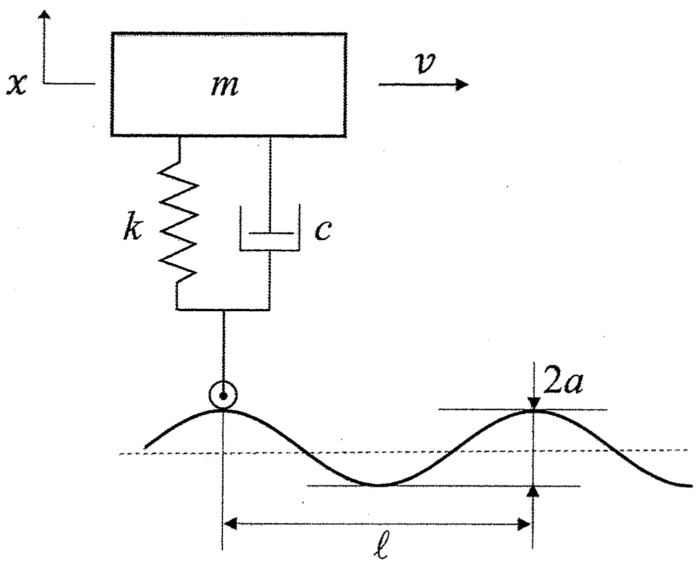


図１

2．図2に示すように，長さ $4\ell$ の剛体棒，その両端に取り付けられた2つの質量 $m$，およびばね定数 $k_1$，$k_2$ の2つのばねからなる振動系を考える．ばねの一端は剛体棒の重心Gから距離 $\ell$ の位置に，もう一端は固定壁に接続されている．剛体棒の質量は無視でき，つり合い状態で剛体棒は垂直に，ばねは水平に保持されている．重心Gの水平方向の変位を $x$，剛体棒の回転角を $\theta$ とし，$\theta$ が微小であるとして，以下の問いに答えよ．

（1）重心Gまわりの慣性モーメント $I$ を求めよ．

（2）各ばねの変位を $x$ と $\theta$ によって表せ．

（3）系の運動方程式を求めよ．

（4）系の固有角振動数を求めよ．

（5）$k_1 = k_2 = k$ のとき，系が1次と2次のモードでどのように振動するか説明せよ．

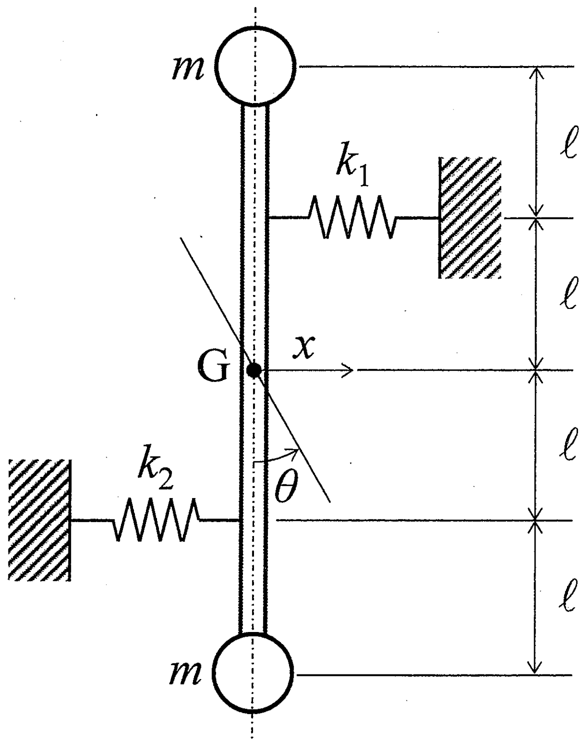


図2

# 制 御 工 学 CONTROL ENGINEERING

1．図1に示すフィードバック制御系を考える．伝達関数 $C(s)$ および $P(s)$ を

$$C(s) = k \quad (k > 0), \quad P(s) = \frac{2-s}{(s+1)(s+2)}$$

とする．以下の問いに答えよ．

（1）$P(s)$ に単位ステップ関数を入力した時の時間応答を求めよ．また，その概形を描け．

（2）$P(s)$ のベクトル軌跡の概形を描け．また，$P(s)$ のゲイン余裕を求めよ．

（3）$Y(s) = G_r(s)R(s) + G_d(s)D(s)$ とする．$G_r(s)$ および $G_d(s)$ を $P(s)$，$Q(s)$，$C(s)$ を用いて表せ．

（4）$Q(s) = 0$ とする．このフィードバック制御系を安定とする $k$ の範囲を求めよ．

（5）$Q(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$，$D(s) = 0$ とする．このフィードバック制御系に単位ステップ関数を入力した時の定常偏差 $e(\infty)$ を求めよ．

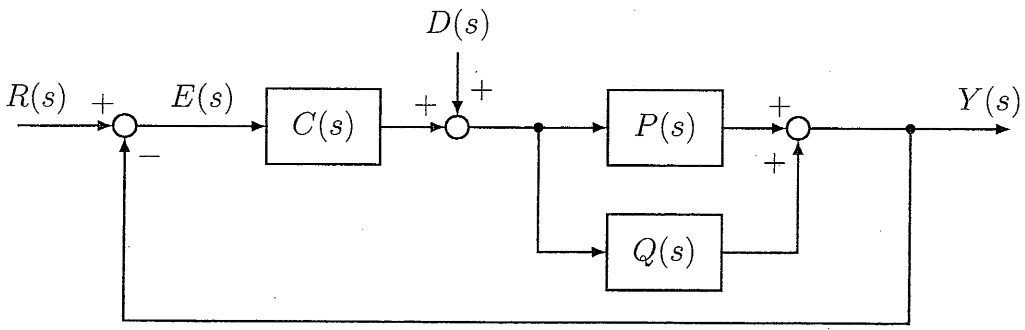


図1

2．次式で表されるフィードバック制御系を考える．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = -kx_1 - kx_2$$

以下の問いに答えよ．

（1）この制御系を次式のように表現するとき，行列 $\boldsymbol{H}$ の要素を求めよ．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）この制御系が安定となる $k$ の範囲を求めよ．

（3）この制御系の評価関数を次式で定義する．

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \lambda u^2)\, dt = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\, dt$$

このとき，

$$J = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$$

が成り立つような正定値行列 $\boldsymbol{P}$ が存在する．次の関係式を導け．

$$\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{Q}$$

（4）問（3）の関係式から，行列 $\boldsymbol{P}$ の要素を $\lambda, k$ を用いて表せ．

（5）初期値が $\boldsymbol{x}(0) = [1, 0]^T$ のとき，評価関数を最小とするフィードバックゲイン $k$ を求めよ．

（6）$\lambda = 1$ のとき，問（5）の初期値に対する解 $x_1(t)$ を求めよ．

（7）$\lambda = 0.01$ のとき，$x_1(t)$ は問（6）の応答と比較してどのように変化するかを述べよ．