

令和 7 年度(2025 年度)実施 秋季募集
東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

試験問題冊子

数学 A MATHEMATICS A

令和 7 年(2025 年)8 月 26 日(火) 9:30 – 10:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること。
3. 全ての問題に解答すること。問題ごとに 2 枚の解答用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること。解答用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数学 A MATHEMATICS A

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

(2) 次の重積分を求めよ.

$$\iiint_D \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$$

ただし領域 D は

$$D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

により与えられる.

(3) n を正の整数とするととき, 次の積分を求めよ.

$$\int \frac{x^n}{x-1} \, dx$$

ただし, 必要があれば総和記号を用いてよい.

数 学 A MATHEMATICS A

2. 行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

により与えられる. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) A のジョルダン標準形を求めよ.
- (4) n を正の整数とするととき, A^n を求めよ.

数学 A MATHEMATICS A

3. デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル場 $\mathbf{A}$ が

$$\mathbf{A} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

により与えられる. ただし, x, y, z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする. 領域 V が

$$V: x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

により与えられる. 以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \mathbf{A}$ および $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を求めよ.

(2) 円柱座標 (r, θ, z) を

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

と定義する. ただし $0 \leq \theta \leq 2\pi$ である. 円柱座標を用いて V を表わせ.

(3) V の表面を S とするとき, 次の面積分

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

を求めよ. ただし, $\mathbf{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである.

令和7年度(2025年度)実施 秋季募集
東北大学大学院機械系4専攻入学試験

試験問題冊子

数学B MATHEMATICS B

令和7年(2025年)8月26日(火) 13:00 - 14:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 解答用紙および草案用紙に受験番号を記入すること。
3. 全ての問題に解答すること。問題ごとに2枚の解答用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること。解答用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数 学 B MATHEMATICS B

1. 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 6xy + x^2}{2xy - 6x^2}$$

$$(2) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x \quad (x > 0)$$

2. 関数 $u(x, t)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0)$$

を満足する. 以下の問いに答えよ.

(1) $u(x, t) = X(x)T(t)$ とするとき, $X(x)$ と $T(t)$ が満たす常微分方程式をそれぞれ求めよ.

(2) 問 (1) における $X(x)$ と $T(t)$ の一般解を求めよ.

(3) 境界条件

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$$

を満足する関数 $u(x, t)$ の一般解を求めよ.

(4) $u(x, 0) = \sin^2 \pi x$ であるとき, 問 (3) の境界条件を満足する $u(x, t)$ を求めよ.

3. 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

関数 $g(t)$ を次のように与える.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(t - nT)$$

ただし, T は正の定数であり,

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leq t < \frac{T}{2} \right) \\ 0 & \left(t < 0, t \geq \frac{T}{2} \right) \end{cases}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $h(t)$ のラプラス変換を求めよ.

(2) $g(t)$ のラプラス変換を求めよ.

(3) $\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t g(u) du \right\} e^{-2t} dt$ の値を求めよ.

令和 7 年度(2025 年度)実施 秋季募集
東北大学大学院機械系 4 専攻入学試験

試験問題冊子

【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10

令和 7 年(2025 年)8 月 27 日(水) 9:30 – 11:30

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票 2 枚が配付されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 5 科目の中から 2 科目を選択して、選択した科目の問題すべてについて解答すること。選択した科目を選択票に記入すること。1 科目に 2 枚綴 1 組を使用すること。各科目とも 1 問につき 1 枚の答案用紙を使用すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

熱力学 THERMODYNAMICS

1. 圧力 p , 比体積 v のある気体が状態 1 から状態 2 に断熱膨張する準静的過程を考える. 状態 1 における圧力は p_1 , 比体積は v_1 とする. 状態 2 における比体積は v_2 とする. この過程では pv^n が一定であった ($n > 1$). 以下の問いに答えよ.
- (1) 準静的過程と断熱過程についてそれぞれの物理的意味を述べよ.
 - (2) 理想気体の状態方程式と比較して, ファン・デル・ワールスの状態方程式で考慮される実在気体効果について述べよ.
 - (3) この気体が実在気体の場合について考える. ここで, 状態 1 における比内部エネルギーは u_1 , 状態 2 における比内部エネルギーは u_2 とする.
 - a) 比内部エネルギーの変化 $u_2 - u_1$ を p_1, v_1, v_2, n を用いて表せ.
 - b) 比エンタルピーの変化 $h_2 - h_1$ が $n(u_2 - u_1)$ に等しいことを示せ. ここで, 状態 1 における比エンタルピーは h_1 , 状態 2 における比エンタルピーは h_2 とする.
 - (4) この気体が比熱比 κ , 気体定数 R の理想気体の場合について考える.
 - a) この過程において pv^κ が一定となることを示せ.
 - b) $v_2 = 2 v_1$ の場合, 状態 2 の温度およびこの過程において気体がなす仕事を p_1, v_1, κ, R の中から必要な記号を用いてそれぞれ表せ.

2. 図1はある実在気体の比エンタルピー h が一定の過程における温度 T と圧力 p の変化を示した温度-圧力 ($T-p$) 線図である. 破線 A は等エンタルピー線の極大となる点を結んだ線である. 点 B は破線 A と $p=0$ の直線の交点である. c_p は定圧比熱, v は比体積とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 破線 A と点 B のそれぞれの名称を記せ.
- (2) 比エントロピー s が T と p の関数であるとして, s の全微分を示せ.
- (3) 比エンタルピーの微小変化 dh が以下の式で表されることを示せ.

$$dh = c_p dT + \left\{ v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right\} dp$$

- (4) 等エンタルピー過程における $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$ を c_p , T , v , $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ を用いて表せ.

- (5) 表1はある実在気体の圧力 1 MPa における状態量を示している. この気体は圧力 1 MPa, 温度 500 K の状態において絞り膨張により冷却が可能かどうかを, 理由を付して説明せよ. なお, この状態が図1の破線 A の左右どちらに位置するかを説明に含めよ. ただし, 表1の温度範囲における等エンタルピー線は部分的に直線とみなせるものとする.

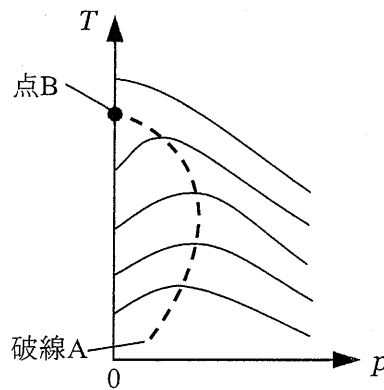


図 1

表 1

温度 T [K]	比体積 v [m ³ /kg]	比エンタルピー h [kJ/kg]	比エントロピー s [kJ/(kg·K)]
495	2.270	2916	7.898
500	2.295	2926	7.918
505	2.320	2936	7.938

備考: 圧力は 1 MPa である

1. 図1に示すように、静止した平行平板内に回転する円錐がある。平板間是非圧縮性ニュートン流体で満たされており、流体の粘度は μ 、密度は ρ でそれぞれ一定である。円錐の回転によって十分に発達した定常層流状態で流れている。円錐の頂点は原点 O に接しており、平板に垂直な回転中心軸を z 軸、半径方向を r 、周方向を θ の円筒座標とする。円錐の底面の半径 R 、高さ H および回転角速度 Ω 、円錐と下板の間の傾斜角 α 、円錐と上板との間の距離 δ はすべて一定である。傾斜角 α は十分小さく、遠心力は無視でき、流体の半径方向速度 v_r は0とする。流体の周方向速度 v_θ は以下の式で書ける。

$$v_\theta(r, z) = \begin{cases} \frac{\Omega}{\tan \alpha} z & (0 \leq r \leq R, 0 \leq z < H) \\ \frac{r\Omega}{\delta} (H + \delta - z) & (0 \leq r \leq R, H \leq z \leq H + \delta) \end{cases}$$

また、平板にはたらく壁面せん断応力 τ_{wall} は、以下の式で書ける。

$$\tau_{\text{wall}} = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (z = 0, H + \delta)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 代表長さを R 、代表速度を $R\Omega$ としたときの流れのレイノルズ数 Re を、 ρ 、 μ 、 Ω 、 R を用いて表せ。
- (2) 円錐と上板の間の領域($0 \leq r \leq R, H \leq z \leq H + \delta$)の流体の周方向速度の大きさの平均値 $|\overline{v_\theta}|$ を、 Ω 、 R を用いて表せ。
- (3) 領域($0 \leq r \leq R, z = H + \delta$)の上板にはたらくトルクの大きさ $|T_{\text{up}}|$ を、 μ 、 δ 、 Ω 、 R を用いて表せ。
- (4) 領域($0 \leq r \leq R, z = 0$)の下板にはたらくトルクの大きさ $|T_{\text{low}}|$ を、 α 、 μ 、 Ω 、 R を用いて表せ。
- (5) $|T_{\text{up}}|$ と $|T_{\text{low}}|$ が同じである場合の δ を、 H を用いて表せ。

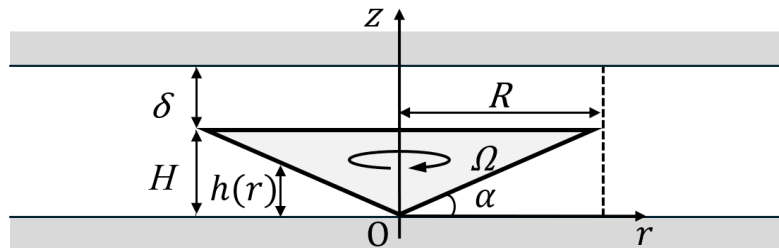


図 1

2. 以下の複素速度ポテンシャル $W(z)$ により表される非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える。

$$W(z) = iUz + m \log z$$

ここで、 U および m は正の実数、 $\log$ は自然対数、 $i = \sqrt{-1}$ である。 z は $z = re^{i\theta}$ の極形式で与えられる複素変数である。 r および θ はそれぞれ半径方向および周方向の極座標であり、 θ の範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 速度ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ と流れ関数 $\psi(r, \theta)$ を U, m, r, θ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。
- (2) 半径方向速度 v_r と周方向速度 v_θ を U, m, r, θ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。
- (3) $\theta = -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ の無限遠方での半径方向速度 v_r と周方向速度 v_θ をそれぞれ求めよ。
- (4) よどみ点の座標 (r, θ) を求めよ。
- (5) よどみ点を通る流線が $\theta = 0$ および $\theta = \pi$ の線と交差する点の座標 (r, θ) を求めよ。ただし原点を除く。
- (6) この流れ場の流線を図2の(a)~(h)から1つ選べ。

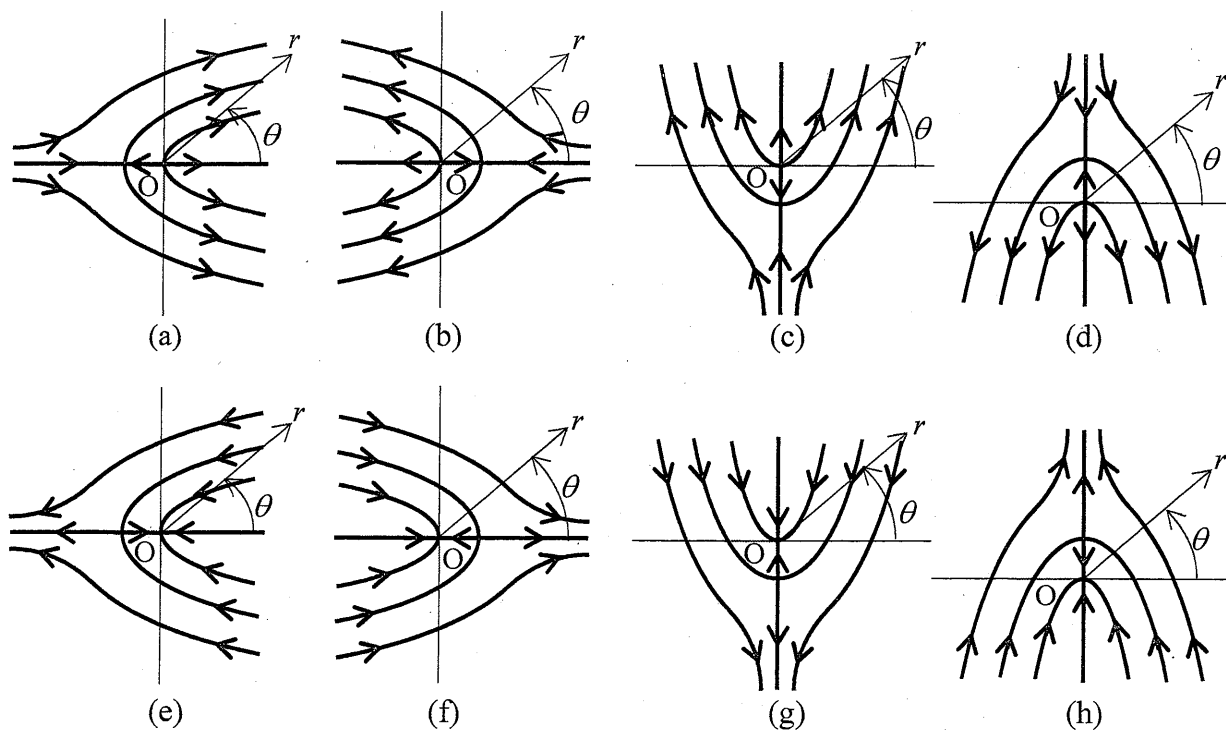
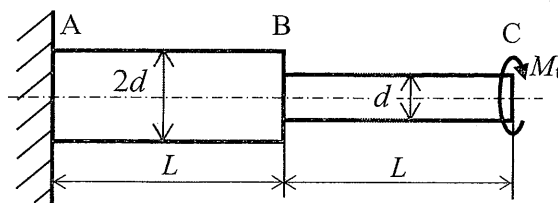


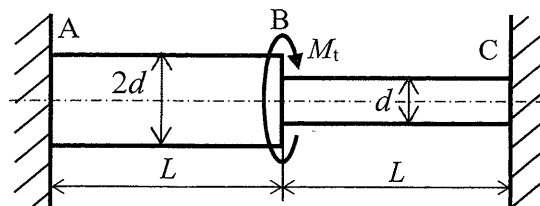
図 2

1. 図 1 に示す段付き中実丸軸 ABC を考える. AB 部分は長さ L , 直径 $2d$, BC 部分は長さ L , 直径 d である. この丸軸のせん断弾性係数は G とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 図 1(a)に示すように, 中実丸軸 ABC を左端 A で剛体壁に固定し, 右端 C にねじりモーメント M_t を作用させる. AB 部分, BC 部分の比ねじれ角をそれぞれ求めよ. また, 右端 C におけるねじれ角を求めよ.
- (2) 図 1(b)に示すように, 中実丸軸 ABC を左端 A と右端 C で剛体壁に固定し, 位置 B にねじりモーメント M_t を作用させる. 左端 A と右端 C における反ねじりモーメント M_{tA} , M_{tC} をそれぞれ求めよ. また, この丸軸に生じる最大せん断応力と最大引張り応力を求めよ.



(a)



(b)

図 1

2. 図2に示すように、階段状の床 ADEF に接する均一な曲げこわさ EI の L 形フレーム ABC がある。L 形フレーム ABC は長さ h_1 、断面積 A のはり AB と、長さ l 、断面積 A のはり BC が点 B で接合して構成されており、はり BC の全長に等分布荷重 w を受けている。床の段差は h_2 とする。はりの自重は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) はり AB とはり BC のせん断力線図 (SFD), 曲げモーメント線図 (BMD) を、それぞれ点 A, 点 B を原点に定めて作図せよ。
- (2) はり AB の点 B における縮み量 δ_B およびたわみ角 θ_B を求めよ。
- (3) はり BC の右端 C が床 EF にちょうど接触したときの等分布荷重 w を求めよ。

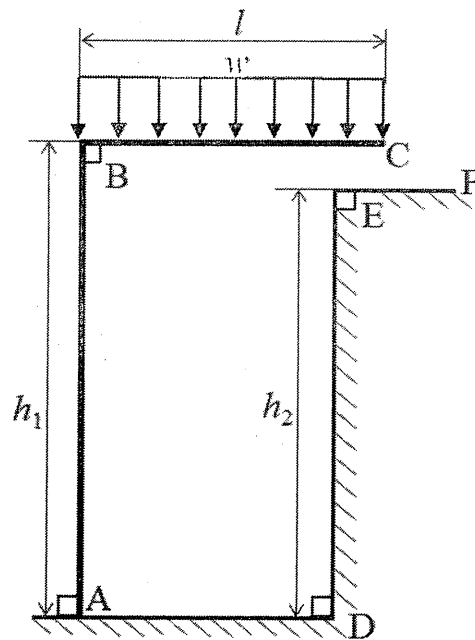


図 2

1. 図1に示すような、ばね定数 k_1 のばね、ねじりこわさ k_2 の軸、粘性減衰係数 c_1 のダッシュポット、粘性減衰係数 c_2 の回転ダッシュポット、半径 r で慣性モーメント J の剛体円板、および質量 m からなる振動系を考える。糸は円板の外周に巻きつけられ、その巻き終わりは質量 m にゆるみなく連結されている。ばね、軸、2つのダッシュポット、糸の質量は無視できるものとする。回転ダッシュポットは回転角速度と粘性減衰係数 c_2 の積で表される粘性抵抗モーメントを生じる。つり合い位置からの質量 m の変位を x とし、以下の問いに答えよ。

- (1) 系の運動エネルギー T を求めよ。
- (2) 系のポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- (3) 系の運動方程式を求めよ。
- (4) 系が過減衰、臨界減衰、不足減衰となる条件をそれぞれ示せ。

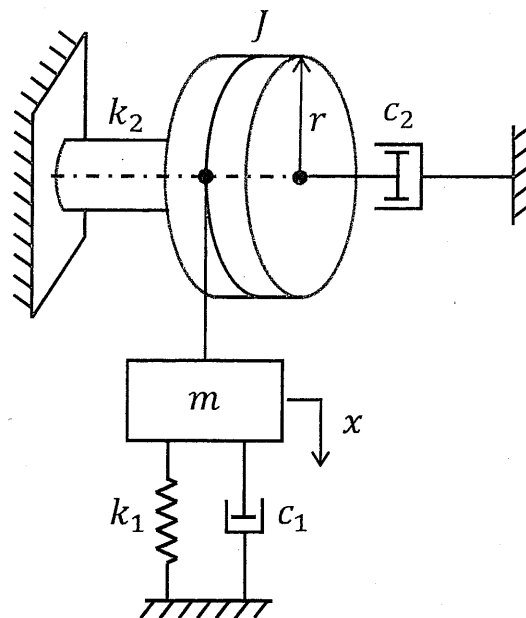


図 1

2. 図2に示すような、2つの台車および2つのばねからなる振動系を考える。質量 m_1 の台車1は水平面上に置かれ、ばね定数 k_1 のばねで壁と連結されている。質量 m_2 の台車2は台車1の上に置かれ、ばね定数 k_2 のばねで台車1と連結されている。壁は強制変位 $u = a \sin \omega t$ で水平方向に加振されている。ここで a は強制変位の振幅、 ω は角振動数、 t は時間である。2つの台車は摩擦なく水平方向のみに移動する。台車1および台車2の静的つり合いの位置からの絶対変位をそれぞれ x_1 および x_2 とする。ばねの質量は無視できるものとする。振動系が定常状態にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) それぞれの台車の運動方程式を導け。
- (2) x_1 と x_2 の振幅を求めよ。
- (3) x_1 の振幅が0となる ω を求めよ。また、その ω での x_2 の振幅を求めよ。

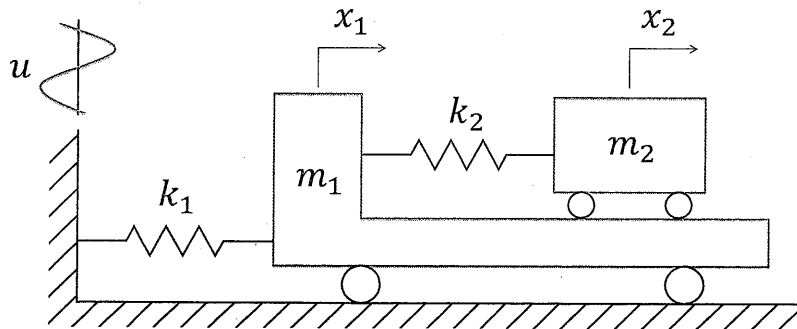


図2

制 御 工 学 CONTROL ENGINEERING

1. 図1に示す閉ループ制御系を考える。開ループ伝達関数 $L(s)$ は,

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

であり, K は正の定数とする。 $R(s)$, $Y(s)$, $E(s)$ は, それぞれ, 目標入力 $r(t)$, 出力 $y(t)$, 偏差 $e(t)$ のラプラス変換である。以下の問いに答えよ。

- (1) この制御系の閉ループ伝達関数 $T(s)$ を求めよ。
- (2) $T(s)$ が安定となる K の範囲を求めよ。
- (3) $L(s)$ の K を変化させるときに, $T(s)$ の根軌跡の概形を描け。また, この系の出力が持続的に振動する安定限界となる K の値を求め, その振動の角周波数 ω を求めよ。
- (4) 単位定速度入力 $r(t) = t$ ($t \geq 0$) を与えたとき, 偏差 $e(t)$ の定常値を求めよ。
- (5) $L(s)$ の K をPI制御器 $K(s)$ に置き換える。閉ループ系が安定であり単位定速度入力に対する定常偏差をゼロとする $K(s)$ を求めよ。

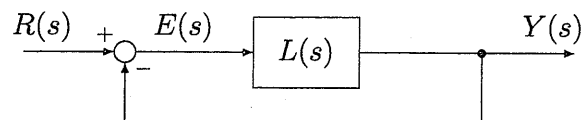


図1

制 御 工 学 CONTROL ENGINEERING

2. 次式で表されるシステムを考える.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t)$$

ただし, $u(t)$ は入力, $y(t)$ は出力, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ は状態ベクトルである. また,

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} p & 1 \end{bmatrix}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $p \neq 0, q = -1$ のとき, 遷移行列 e^{At} を求めよ.
- (2) $p = 2, q = -1$ のとき, システムの入力から出力までの伝達関数を求めよ.
- (3) $q = 1$ のとき, 与えられた A, b に対して, p がある条件を満たすときに状態フィードバックで極を任意に配置できない. この条件を求めよ.
- (4) (3) で導出した条件のうち $p > 0$ のものに対して, 状態フィードバック制御により極配置ができない理由を考える. システムを $z_1 = x_1 + x_2, z_2 = x_1 - x_2$ と変数変換し, さらに状態変数線図を描いて変数間の関係を示すことによりこの理由を説明せよ. ここで, 状態変数線図の例として, $\dot{w} = 3w + u$ の状態変数線図を図2に示す.
- (5) $q = 1$ のとき, 状態フィードバック

$$u = -kx, \quad k = \begin{bmatrix} k & -1 \end{bmatrix}$$

を適用したところ, 閉ループ系の極が -5 と -6 になった. p および k を求めよ. ただし, $p > 0$ とする.

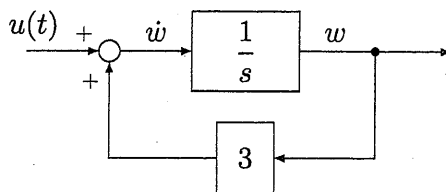


図 2